ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−1

1) a) Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les quatre matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de E, appelée base canonique. Quelle est la dimension de E ?

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application φ de E dans E définie par :

$$\forall M \in E,\ \varphi(M) = A \times M.$$

Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et donner la matrice B de φ dans la base canonique de E.

2) a) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et que φ est un automorphisme de E.

b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas inversible et que φ n'est pas un automorphisme de E.

3) Dans le cas général, montrer que (A inversible) $\Longleftrightarrow$ (B inversible).

4) a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A et vérifier que toute valeur propre de A est valeur propre de B. A est-elle diagonalisable ? B est-elle diagonalisable ?

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont valeurs propres de B. B est-elle diagonalisable ?

5) Revenons au cas général :

a) Soit λ une valeur propre de A et $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de B et donner deux vecteurs propres associés et linéairement indépendants.

b) Montrer que A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ B diagonalisable.

Ind : on pourra montrer que B et A ont les mêmes valeurs propres.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

a)

Les matrices E_i $1 \leq i \leq 4$, sont dans E.

$$\forall M \in E,\ \exists!(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ /\ M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4.$$

Toute matrice de E se décompose de manière unique en une combinaison linéaire des E_i, donc la famille $(E_1, \ldots, E_4)$ est une base de E.

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.}$$

b)

φ est une application de E dans E ; de plus

$$\begin{aligned} \forall (M,N) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) = A(\lambda M) + AN \\ &= \lambda AM + AN = \lambda\varphi(M) + \varphi(N), \end{aligned}$$

d'après les règles de calcul sur les matrices.

φ est un endomorphisme de E.

- Matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$.

Notons B cette matrice : $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, car dimension de $E = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Il s'agit d'exprimer, par définition, $\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_3)$ et $\varphi(E_4)$ en fonction de E_1, E_2, E_3 et E_4.

$$\begin{aligned}
\varphi(E_1) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\
\varphi(E_2) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = cE_1 + dE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\
\varphi(E_3) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + bE_4 \\
\varphi(E_4) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + cE_3 + dE_4
\end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix}.$$

QUESTION–2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A est inversible car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

Pour montrer que φ est un automorphisme de E, montrons que sa matrice B est inversible.