

**- PROBLEME DE MECANIQUE DU POINT 2 -**

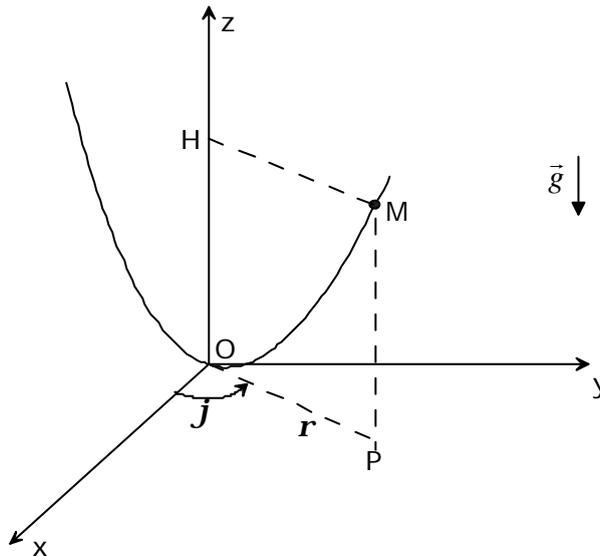
• **ENONCE :** « Particule dans une cuvette parabolique »

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur  $\vec{g}$ , à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre  $\mathfrak{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  supposé galiléen.

La surface extérieure de cette cavité est un parabolôïde de révolution (P), d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques ( $\mathbf{r}, \mathbf{j}, z$ ) est :  $\mathbf{r}^2 = az$  ( $a > 0$ )

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur (P) ; on suppose en outre la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées  $\mathbf{r}$  et  $z$  de M satisfont à l'inégalité :  $z \geq \mathbf{r}^2 / a$ .

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant celle de  $\mathfrak{R}_c(O, \vec{e}_r, \vec{e}_j, \vec{e}_z)$ .



**I. Moment cinétique**

1.1) Exprimer, dans la base de  $\mathfrak{R}_c$ , la vitesse de M par rapport à  $\mathfrak{R}$ .

1.2) Quelle est l'expression, dans la base de  $\mathfrak{R}_c$ , du moment cinétique en O,  $\vec{L}_O$ , par rapport à  $\mathfrak{R}$  ? En déduire sa projection selon l'axe Oz.

1.3) Montrer que la réaction  $\vec{R}$  qu'exerce le parabolôïde (P) sur M est contenue dans le plan OHM. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection de  $\vec{L}_O$  sur Oz se conserve au cours du temps.

Expliciter cette relation de conservation en fonction de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{j}$  ; dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par  $L$  cette constante.

**II. Energie**

**2.1)** Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  de la particule M par rapport à  $\mathfrak{R}$  ?

**2.2)** Justifier l'existence d'une énergie potentielle  $E_p$  dont dérivent les forces extérieures agissant sur M. Exprimer  $E_p$  en fonction de  $\mathbf{r}$  en supposant que  $E_p(0) = 0$ .

**2.3)** Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

**III. Discussion générale du mouvement**

**3.1)** Dédurre de ce qui précède une équation différentielle du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \times G(\mathbf{r}) + E_{pef}(\mathbf{r}) = E_m$$

où  $G(\mathbf{r})$  est positif, sans dimension et où  $E_{pef}(\mathbf{r})$  est une énergie potentielle effective.

Expliciter  $G(\mathbf{r})$  et  $E_{pef}(\mathbf{r})$ .

**3.2)** Représenter avec soin le graphe  $E_{pef}(\mathbf{r})$ ; montrer que  $E_{pef}(\mathbf{r})$  passe par un minimum pour une valeur  $\mathbf{r}_m$  de  $\mathbf{r}$  que l'on exprimera en fonction de  $L, m, a$  et  $g$ , intensité du champ de pesanteur.

**3.3)** Discuter, à l'aide du graphe  $E_{pef}(\mathbf{r})$  la nature du mouvement de M; en déduire que la trajectoire de M sur le paraboloïde ( $\mathcal{P}$ ) est nécessairement tracée sur une région de ( $\mathcal{P}$ ) limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème : on se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

**IV. Etude de quelques mouvements particuliers**

**4.1)** A quelle condition sur  $L$  la trajectoire de M sur ( $\mathcal{P}$ ) est-elle une parabole méridienne ?

**4.2)** Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur ( $\mathcal{P}$ ) soit un cercle horizontal.

**4.3)** Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée  $\mathbf{r}$  de la valeur  $\mathbf{r}_m$  pour laquelle  $E_{pef}(\mathbf{r})$  est minimale; montrer que  $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_m$  oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où  $\mathbf{r}_m = 1 \text{ m}$  et  $a = 2 \text{ m}$ .

On prendra  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

**4.4)** L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement; commenter à l'aide du graphe  $E_{pef}(\mathbf{r})$

**Rq :** ce problème est la première partie de l'épreuve de Physique 1 du concours CCP-MP 99 (partie à faire en 2 heures)

\*\*\*\*\*