Point de Fermat dans un triangle.

1. Soit $M_1, M_2, \dots, M_n$ une famille de n points du plan complexe, d'affixes respectifs $z_1, z_2, \dots, z_n$.
   Montrer que l'égalité $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ est réalisée si et seulement si les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont situés sur une même demi-droite issue de 0. [S]

2. On se donne n point $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'affixes respectifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ tous non nuls.
   Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on pose $\omega_k = \dfrac{a_k}{|a_k|}$ et on suppose que $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 0$.
   Soit M un point quelconque du plan, d'affixe z.
   (a) Montrer que la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)$ est indépendante de z, et que $S < 0$. [S]
   (b) Prouver l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} |z - a_k| \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. [S]
   (c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si, pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, il existe μ_k dans $]-\infty, 1]$ tel que $z = \mu_k a_k$. [S]
   (d) Interpréter géométriquement les conditions précédentes et en déduire, en fonction de la disposition des points $A_1, A_2, \dots, A_n$, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $(E) : \sum_{k=1}^{n} |z - a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.
   Indication : on discutera suivant que les A_k sont alignés ou non avec O. On vérifiera que la condition d'alignement avec O n'est possible que si n est pair. [S]

3. (a) Soient P et Q deux points distincts du plan.
   Identifier l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}} = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
   Indiquer comment construire cet ensemble à la règle et au compas. [S]
   (b) Dans le plan, on se donne trois A_1, A_2, A_3 non alignés. On suppose que la mesure de chaque angle intérieur au triangle $A_1A_2A_3$ est inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.
   On appelle *point de Fermat* du triangle $A_1A_2A_3$ le point O pour lequelle la somme des distances $OA_1 + OA_2 + OA_3$ est minimum.
   Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité du point O, ainsi que sa construction à la règle et au compas.
   Indication : on cherchera à se placer dans la situation décrite dans la question (2), et on montrera notamment que les points images de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ forment un triangle équilatéral de centre O (d'ailleurs il sera commode, quitte à effectuer une rotation de centre O, de supposer que ω_1 est égal à 1.) [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. La démonstration s'effectue par récurrence, à partir de $n = 2$.
   - Montrons que la propriété est vraie au rang $n = 2$.
     On se donne donc deux points M_1, M_2 du plan, d'affixes respectifs z_1, z_2.
     Le résultat est évident si z_1 ou z_2 est nul (c'est-à-dire si M_1 ou M_2 est à l'origine).
     On peut donc supposer que ni z_1 ni z_2 ne sont nuls. Dans ces conditions :
     $$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$
     $$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$$
     Il est clair que pour tout z de $\mathbb{C}^*$, on a $\mathrm{Re}\,(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi :
     $$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z_1\overline{z_2}) = 0\ (2\pi)$$
     $$\Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(\overline{z_2}) = 0\ (2\pi) \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2\ (2\pi)$$
     et ce dernier résultat signifie que M_1 et M_2 sont sur une même demi-droite issue de 0.
   - On suppose maintenant que la propriété est vraie au rang $n \geq 2$.
     On se donne les $n+1$ points $M_1, \ldots, M_n, M_{n+1}$ d'affixes respectifs $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}$.
     Soit M le point d'affixe $Z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$.
     On a la double inégalité $|Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|$.
     Ainsi $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots + |z_{n+1}| \Leftrightarrow \begin{cases} |Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}| \\ |z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \end{cases}$
     La deuxième égalité équivaut à dire que $M_1, \ldots, M_n$ sont une même demi-droite Δ issue de 0 (hypothèse de récurrence.) Bien entendu le point M figure lui aussi sur Δ.
     La première égalité équivaut à dire que M_{n+1} et M sont eux aussi sur une même demi-droite issue de 0, c'est-à-dire que M_{n+1} est lui aussi sur Δ.

   Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence. [Q]

2. (a) En développant : $S = z\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k} - \sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k}\,a_k = z\underbrace{\overline{\sum_{k=1}^{n}\omega_k}}_{=0} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}\,a_k}{|a_k|} = -\sum_{k=1}^{n}|a_k| < 0.$
   Ainsi S est indépendante de z, et $S < 0$. [Q]

   (b) On trouve $\sum_{k=1}^{n}|a_k| = -S = |S| = \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k}\,(z-a_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\overline{\omega_k}\,(z-a_k)|$.
   On sait que $|\overline{\omega_k}| = 1$ pour tout k. On en déduit finalement : $\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=1}^{n}|z-a_k|$. [Q]

   (c) D'après la question (b), $\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}|z-a_k| \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k}\,(z-a_k)\right| = \sum_{k=1}^{n}|\overline{\omega_k}\,(z-a_k)|$.
   Ainsi les B_k d'affixe $\overline{\omega_k}\,(z-a_k)$ sont sur une même demi-droite Δ issue de O.
   Mais alors le point d'affixe $S = \sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k}\,(z-a_k)$ est sur Δ.
   Il en résulte que Δ est nécessairement la demi-droite des réels négatifs ou nuls.
   Ainsi $\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}|z-a_k| \Leftrightarrow \forall\, k \in \{1,\ldots,\}, \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R}^-,\ \overline{\omega_k}\,(z-a_k) = \lambda_k$.
   Mais $\overline{\omega_k}\,(z-a_k) = \lambda_k \Leftrightarrow z - a_k = \omega_k\lambda_k = \frac{a_k}{|a_k|}\lambda_k \Leftrightarrow z = \left(1 + \frac{\lambda_k}{|a_k|}\right)a_k$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.