Point de Fermat dans un triangle.

1. Soit $M_1, M_2, \ldots, M_n$ une famille de n points du plan complexe, d'affixes respectifs $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Montrer que l'égalité $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ est réalisée si et seulement si les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont situés sur une même demi-droite issue de 0. [S]

2. On se donne n point $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'affixes respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tous non nuls.
   Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $\omega_k = \dfrac{a_k}{|a_k|}$ et on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k = 0$.
   Soit M un point quelconque du plan, d'affixe z.
   (a) Montrer que la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)$ est indépendante de z, et que $S < 0$. [S]
   (b) Prouver l'inégalité $\sum\limits_{k=1}^{n} |z - a_k| \geq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. [S]
   (c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si, pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, il existe μ_k dans $]-\infty, 1]$ tel que $z = \mu_k a_k$. [S]
   (d) Interpréter géométriquement les conditions précédentes et en déduire, en fonction de la disposition des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $(E) : \sum\limits_{k=1}^{n} |z - a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.
   Indication : on discutera suivant que les A_k sont alignés ou non avec O. On vérifiera que la condition d'alignement avec O n'est possible que si n est pair. [S]

3. (a) Soient P et Q deux points distincts du plan.
   Identifier l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}} = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.
   Indiquer comment construire cet ensemble à la règle et au compas. [S]
   (b) Dans le plan, on se donne trois A_1, A_2, A_3 non alignés. On suppose que la mesure de chaque angle intérieur au triangle $A_1A_2A_3$ est inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.
   On appelle *point de Fermat* du triangle $A_1A_2A_3$ le point O pour lequelle la somme des distances $OA_1 + OA_2 + OA_3$ est minimum.
   Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité du point O, ainsi que sa construction à la règle et au compas.
   Indication : on cherchera à se placer dans la situation décrite dans la question (2), et on montrera notamment que les points images de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ forment un triangle équilatéral de centre O (d'ailleurs il sera commode, quitte à effectuer une rotation de centre O, de supposer que ω_1 est égal à 1.) [S]

Corrigé du problème

1. La démonstration s'effectue par récurrence, à partir de $n = 2$.
   - Montrons que la propriété est vraie au rang $n = 2$.
     On se donne donc deux points M_1, M_2 du plan, d'affixes respectifs z_1, z_2.
     Le résultat est évident si z_1 ou z_2 est nul (c'est-à-dire si M_1 ou M_2 est à l'origine).
     On peut donc supposer que ni z_1 ni z_2 ne sont nuls. Dans ces conditions :
     $$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}\,(z_1\,\overline{z_2}\,) = 2\,|z_1|\,|z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z_1\,\overline{z_2}\,) = |z_1\,\overline{z_2}\,| \end{aligned}$$
     Il est clair que pour tout z de $\mathbb{C}^*$, on a $\mathrm{Re}\,(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi :
     $$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow z_1\,\overline{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z_1\,\overline{z_2}\,) = 0 \ (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(\,\overline{z_2}\,) = 0 \ (2\pi) \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \ (2\pi) \end{aligned}$$
     et ce dernier résultat signifie que M_1 et M_2 sont sur une même demi-droite issue de 0.
   - On suppose maintenant que la propriété est vraie au rang $n \geq 2$.
     On se donne les $n+1$ points $M_1, \ldots, M_n, M_{n+1}$ d'affixes respectifs $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}$.
     Soit M le point d'affixe $Z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$.
     On a la double inégalité $|Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|$.
     Ainsi $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots + |z_{n+1}| \Leftrightarrow \begin{cases} |Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}| \\ |z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \end{cases}$
     La deuxième égalité équivaut à dire que $M_1, \ldots, M_n$ sont une même demi-droite Δ issue de 0 (hypothèse de récurrence.) Bien entendu le point M figure lui aussi sur Δ.
     La première égalité équivaut à dire que M_{n+1} et M sont eux aussi sur une même demi-droite issue de 0, c'est-à-dire que M_{n+1} est lui aussi sur Δ.

   Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence. [Q]

2. (a) En développant : $S = z\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\, a_k = z\,\underbrace{\overline{\sum_{k=1}^{n} \omega_k}}_{=0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a_k}\, a_k}{|a_k|} = -\sum_{k=1}^{n} |a_k| < 0.$
   Ainsi S est indépendante de z, et $S < 0$. [Q]

   (b) On trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k| = -S = |S| = \Bigl|\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)\Bigr| \leq \sum_{k=1}^{n} |\overline{\omega_k}\,(z - a_k)|$.
   On sait que $|\,\overline{\omega_k}\,| = 1$ pour tout k. On en déduit finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - a_k|$. [Q]

   (c) D'après la question (b), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |z - a_k| \Leftrightarrow \Bigl|\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)\Bigr| = \sum_{k=1}^{n} |\overline{\omega_k}\,(z - a_k)|$.
   Ainsi les B_k d'affixe $\overline{\omega_k}\,(z - a_k)$ sont sur une même demi-droite Δ issue de O.
   Mais alors le point d'affixe $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k}\,(z - a_k)$ est sur Δ.
   Il en résulte que Δ est nécessairement la demi-droite des réels négatifs ou nuls.
   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |z - a_k| \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \ldots, \},\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^-,\ \overline{\omega_k}\,(z - a_k) = \lambda_k$.
   Mais $\overline{\omega_k}\,(z - a_k) = \lambda_k \Leftrightarrow z - a_k = \omega_k \lambda_k = \dfrac{a_k}{|a_k|}\lambda_k \Leftrightarrow z = \Bigl(1 + \dfrac{\lambda_k}{|a_k|}\Bigr) a_k$.