

Point de Fermat dans un triangle.

1. Soit M_1, M_2, \dots, M_n une famille de n points du plan complexe, d'affixes respectifs z_1, z_2, \dots, z_n .
 Montrer que l'égalité $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ est réalisée si et seulement si les points M_1, M_2, \dots, M_n sont situés sur une même demi-droite issue de 0. [S]

2. On se donne n points A_1, A_2, \dots, A_n d'affixes respectifs a_1, a_2, \dots, a_n tous non nuls.

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on pose $\omega_k = \frac{a_k}{|a_k|}$ et on suppose que $\sum_{k=1}^n \omega_k = 0$.

Soit M un point quelconque du plan, d'affixe z .

(a) Montrer que la somme $S = \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k)$ est indépendante de z , et que $S < 0$. [S]

(b) Prouver l'inégalité $\sum_{k=1}^n |z - a_k| \geq \sum_{k=1}^n |a_k|$. [S]

(c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si, pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, il existe μ_k dans $] -\infty, 1]$ tel que $z = \mu_k a_k$. [S]

(d) Interpréter géométriquement les conditions précédentes et en déduire, en fonction de la disposition des points A_1, A_2, \dots, A_n , l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité

$$(E) : \sum_{k=1}^n |z - a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Indication : on discutera suivant que les A_k sont alignés ou non avec O . On vérifiera que la condition d'alignement avec O n'est possible que si n est pair. [S]

3. (a) Soient P et Q deux points distincts du plan.

Identifier l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}} = \frac{2\pi}{3}$ (2π).

Indiquer comment construire cet ensemble à la règle et au compas. [S]

(b) Dans le plan, on se donne trois A_1, A_2, A_3 non alignés. On suppose que la mesure de chaque angle intérieur au triangle $A_1A_2A_3$ est inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.

On appelle *point de Fermat* du triangle $A_1A_2A_3$ le point O pour lequel la somme des distances $OA_1 + OA_2 + OA_3$ est minimum.

Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité du point O , ainsi que sa construction à la règle et au compas.

Indication : on cherchera à se placer dans la situation décrite dans la question (2), et on montrera notamment que les points images de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ forment un triangle équilatéral de centre O (d'ailleurs il sera commode, quitte à effectuer une rotation de centre O , de supposer que ω_1 est égal à 1.) [S]

Corrigé du problème

1. La démonstration s'effectue par récurrence, à partir de $n = 2$.

– Montrons que la propriété est vraie au rang $n = 2$.

On se donne donc deux points M_1, M_2 du plan, d'affixes respectifs z_1, z_2 .

Le résultat est évident si z_1 ou z_2 est nul (c'est-à-dire si M_1 ou M_2 est à l'origine).

On peut donc supposer que ni z_1 ni z_2 ne sont nuls. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1||z_2| \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout z de \mathbb{C}^* , on a $\operatorname{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z_1 \overline{z_2}) = 0 \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(\overline{z_2}) = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

et ce dernier résultat signifie que M_1 et M_2 sont sur une même demi-droite issue de 0.

– On suppose maintenant que la propriété est vraie au rang $n \geq 2$.

On se donne les $n + 1$ points M_1, \dots, M_n, M_{n+1} d'affixes respectifs z_1, \dots, z_n, z_{n+1} .

Soit M le point d'affixe $Z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$.

On a la double inégalité $|Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$.

$$\text{Ainsi } |z_1 + \dots + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_{n+1}| \Leftrightarrow \begin{cases} |Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}| \\ |z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \end{cases}$$

La deuxième égalité équivaut à dire que M_1, \dots, M_n sont sur une même demi-droite Δ issue de 0 (hypothèse de récurrence.) Bien entendu le point M figure lui aussi sur Δ .

La première égalité équivaut à dire que M_{n+1} et M sont eux aussi sur une même demi-droite issue de 0, c'est-à-dire que M_{n+1} est lui aussi sur Δ .

Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence. [Q]

$$2. \text{ (a) En développant : } S = z \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} - \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} a_k = z \underbrace{\sum_{k=1}^n \omega_k}_{=0} - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{a_k} a_k}{|a_k|} = - \sum_{k=1}^n |a_k| < 0.$$

Ainsi S est indépendante de z , et $S < 0$. [Q]

$$\text{(b) On trouve } \sum_{k=1}^n |a_k| = -S = |S| = \left| \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\overline{\omega_k} (z - a_k)|.$$

On sait que $|\overline{\omega_k}| = 1$ pour tout k . On en déduit finalement : $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n |z - a_k|$. [Q]

$$\text{(c) D'après la question (b), } \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |z - a_k| \Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k) \right| = \sum_{k=1}^n |\overline{\omega_k} (z - a_k)|.$$

Ainsi les B_k d'affixe $\overline{\omega_k} (z - a_k)$ sont sur une même demi-droite Δ issue de 0.

Mais alors le point d'affixe $S = \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k)$ est sur Δ .

Il en résulte que Δ est nécessairement la demi-droite des réels négatifs ou nuls.

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |z - a_k| \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^-, \overline{\omega_k} (z - a_k) = \lambda_k.$$

$$\text{Mais } \overline{\omega_k} (z - a_k) = \lambda_k \Leftrightarrow z - a_k = \omega_k \lambda_k = \frac{a_k}{|a_k|} \lambda_k \Leftrightarrow z = \left(1 + \frac{\lambda_k}{|a_k|}\right) a_k.$$