Homographies du demi-plan de Poincaré

Notations

- On note $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. On dit que P est le *demi-plan de Poincaré.*
- Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$, on pose $\delta(u) = ad - bc$.
- On note $E = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \delta(u) = 1\}$.
- Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E, on note h_u l'application définie sur P par $h_u(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.
  On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications h_u, pour tout u de E.

Première partie

Dans cette partie, on introduit une opération sur E et on en étudie quelques propriétés.
Pour tous $u = (a, b, c, d)$ et $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de E, on pose $u \otimes v = (a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta, c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta)$.

1. Montrer que $u \otimes v$ est encore un élément de E. Vérifier qu'en général $u \otimes v \neq v \otimes u$.
   Par ailleurs, on admet que : $\forall (u, v, w) \in E,\ u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. [S]
2. Montrer que $e = (1, 0, 0, 1)$ est dans E et vérifier que $u \otimes e = e \otimes u = u$.
   Dans toute la suite, pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E, on note $u' = (d, -b, -c, a)$.
   Montrer que u' est dans E et que $u \otimes u' = u' \otimes u = e$. [S]
3. Pour tout u de E et tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u^0 = e$ et $u^{n+1} = u^n \otimes u$.
   Pour tout θ de $\mathbb{R}$, on pose $\begin{cases} r(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, \sin\theta, \cos\theta) \\ s(\theta) = (\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta, \operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta) \end{cases}$
   (a) Pour tout réel θ, vérifier que $r(\theta)$ et $s(\theta)$ sont des éléments de E. [S]
   (b) Pour tous réels θ_1 et θ_2, calculer $r(\theta_1) \otimes r(\theta_2)$ et $s(\theta_1) \otimes s(\theta_2)$. [S]
   (c) Identifier $r(0), r(\theta)', s(0), s(\theta)'$ et calculer $r(\theta)^n$ et $s(\theta)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [S]

Seconde partie

Dans cette partie, on étudie certaines propriétés des éléments h de $\mathcal{H}$.

1. Dans cette question, u et v sont des éléments quelconques de E.
   (a) Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E et tout z de P, montrer qu'on a $\operatorname{Im} h_u(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$.
   En déduire que h_u est une application de P dans P. [S]
   (b) Identifier h_e. Montrer qu'on a l'égalité $h_v \circ h_u = h_{v \otimes u}$. [S]
   (c) Montrer que h_u est une bijection de P sur P, et que $(h_u)^{-1} = h_{u'}$. [S]
2. (a) Pour tout u de E, vérifier que $h_u = \mathrm{id}_P$ si et seulement si $u = e$ ou $u = -e$. [S]
   (b) En déduire que, pour tout u, v de E, on a : $h_u = h_v \Leftrightarrow (u = v \text{ ou } u = -v)$. [S]
   (c) Déterminer les éléments h_u de $\mathcal{H}$ qui sont des involutions de P. [S]
3. (a) Dans cette question, on suppose que $u \neq \pm e$. Ainsi h_u n'est pas l'identité de P.
   Montrer que h_u a un point fixe dans P (il existe z dans P tel que $h_u(z) = z$) si et seulement si $|a + d| < 2$, et qu'alors ce point fixe est unique (on ne cherchera pas à l'expliciter.) [S]

(b) Soit h_u une involution de P, distincte de l'identité (cf question II.2c).
Calculer le point fixe de h_u dans P, en fonction de $u = (a, b, c, d)$. [S]

(c) Préciser notamment les points fixes éventuels de h_u dans P si $u = r(\theta)$ ou $u = s(\theta)$. [S]

(d) Montrer finalement que les applications h de $\mathcal{H}$ telles que $h(i) = i$ sont exactement les applications h_u, avec $u = r(\theta)$, pour tout réel θ. [S]

Troisième partie

Pour simplifier, on note $f_\theta = h_{r(\theta)}$ et $g_t = h_{s(t)}$.
Ainsi, pour tous réels θ, t, et pour tout z de P, $f_\theta(z) = \dfrac{z\,\cos\theta - \sin\theta}{z\,\sin\theta + \cos\theta}$ et $g_t(z) = \dfrac{z\,\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{z\,\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$.

Dans cette partie, on prouve que tout h de $\mathcal{H}$ est de manière unique la composée, dans cet ordre, d'une application f_θ, puis d'une application g_t, puis d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$ de rapport $\lambda > 0$.

1. Indiquer pourquoi les applications $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda > 0$, sont dans $\mathcal{H}$. [S]
2. Préciser à quelle condition sur θ et φ on a $f_\theta = f_\varphi$. [S]
3. Soit $\omega = x + iy$ un élément de P.
Montrer qu'il existe un couple unique (t, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\omega = \lambda\, g_t(i)$. [S]
4. Soit h un élément de $\mathcal{H}$.
Montrer qu'il existe un triplet unique (θ, λ, t) de $[0, \pi[\times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda\, g_t \circ f_\theta$. [S]

Quatrième partie

On pose $F = E \cap \mathbb{Z}^4 = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ \delta(u) = ad - bc = 1\}$.
On note $\mathcal{K}$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ formé des applications h_u, quand u parcourt F.
Il est clair que pour tous u, v de F, $u \otimes v$ et u' sont encore dans F. Il en découle que le composé de deux éléments de $\mathcal{K}$ et que l'inverse d'un élément de $\mathcal{K}$ sont encore des éléments de $\mathcal{K}$.
Dans cette partie, ω est un élément fixé de P. On va s'intéresser aux images $h(\omega)$ de ω par les différentes applications h de $\mathcal{K}$, constater que la partie imaginaire des $h(\omega)$ passe par une valeur maximum, et vérifier que ce maximum est notamment atteint en un point $z = h(\omega)$ tel que $|z| \geq 1$ et $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$.

1. (a) Prouver que $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2,\ |c\omega + d| \leq 1\}$ est un ensemble fini. [S]

   (b) En déduire que $\{\operatorname{Im} h(\omega),\ h \in \mathcal{K}\}$ possède un maximum $M(\omega)$, avec $M(\omega) \geq \operatorname{Im} \omega$. [S]

2. On reprend les notations de la question précédente.
En particulier, on désigne par k un élément de $\mathcal{K}$ tel que $\operatorname{Im} k(\omega) = M(\omega)$.
On note $\varphi = h_{(0,-1,1,0)}$ et $\tau = h_{(1,m,0,1)}$ (avec m dans $\mathbb{Z}$) qui sont toutes deux dans $\mathcal{K}$.

   (a) En considérant $\varphi \circ k$, montrer que $|k(\omega)| \geq 1$. [S]

   (b) En considérant $\tau \circ k$, montrer qu'il existe ℓ dans $\mathcal{K}$ tel que $\begin{cases} \operatorname{Im} \ell(\omega) = M(\omega) \\ \operatorname{Re} \ell(\omega) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$ [S]

   (c) En déduire que $M(z)$ est supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Préciser le domaine du demi-plan P où se situe $\ell(\omega)$. [S]