

## Homographies du demi-plan de Poincaré

### Notations

- On note  $P = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$ . On dit que  $P$  est le *demi-plan de Poincaré*.
- Pour tout  $u = (a, b, c, d)$  de  $\mathbb{R}^4$ , on pose  $\delta(u) = ad - bc$ .
- On note  $E = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \delta(u) = 1\}$ .
- Pour tout  $u = (a, b, c, d)$  de  $E$ , on note  $h_u$  l'application définie sur  $P$  par  $h_u(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .  
On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des applications  $h_u$ , pour tout  $u$  de  $E$ .

### Première partie

Dans cette partie, on introduit une opération sur  $E$  et on en étudie quelques propriétés.

Pour tous  $u = (a, b, c, d)$  et  $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  de  $E$ , on pose  $u \otimes v = (a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta, c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta)$ .

1. Montrer que  $u \otimes v$  est encore un élément de  $E$ . Vérifier qu'en général  $u \otimes v \neq v \otimes u$ .  
Par ailleurs, on admet que :  $\forall (u, v, w) \in E, u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$ . [S]

2. Montrer que  $e = (1, 0, 0, 1)$  est dans  $E$  et vérifier que  $u \otimes e = e \otimes u = u$ .  
Dans toute la suite, pour tout  $u = (a, b, c, d)$  de  $E$ , on note  $u' = (d, -b, -c, a)$ .  
Montrer que  $u'$  est dans  $E$  et que  $u \otimes u' = u' \otimes u = e$ . [S]

3. Pour tout  $u$  de  $E$  et tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on pose  $u^0 = e$  et  $u^{n+1} = u^n \otimes u$ .

Pour tout  $\theta$  de  $\mathbb{R}$ , on pose 
$$\begin{cases} r(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta, \sin \theta, \cos \theta) \\ s(\theta) = (\text{ch } \theta, \text{sh } \theta, \text{sh } \theta, \text{ch } \theta) \end{cases}$$

- (a) Pour tout réel  $\theta$ , vérifier que  $r(\theta)$  et  $s(\theta)$  sont des éléments de  $E$ . [S]
- (b) Pour tous réels  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , calculer  $r(\theta_1) \otimes r(\theta_2)$  et  $s(\theta_1) \otimes s(\theta_2)$ . [S]
- (c) Identifier  $r(0), r(\theta)', s(0), s(\theta)'$  et calculer  $r(\theta)^n$  et  $s(\theta)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ . [S]

### Seconde partie

Dans cette partie, on étudie certaines propriétés des éléments  $h$  de  $\mathcal{H}$ .

1. Dans cette question,  $u$  et  $v$  sont des éléments quelconques de  $E$ .

(a) Pour tout  $u = (a, b, c, d)$  de  $E$  et tout  $z$  de  $P$ , montrer qu'on a  $\text{Im } h_u(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2}$ .  
En déduire que  $h_u$  est une application de  $P$  dans  $P$ . [S]

(b) Identifier  $h_e$ . Montrer qu'on a l'égalité  $h_v \circ h_u = h_{v \otimes u}$ . [S]

(c) Montrer que  $h_u$  est une bijection de  $P$  sur  $P$ , et que  $(h_u)^{-1} = h_{u'}$ . [S]

2. (a) Pour tout  $u$  de  $E$ , vérifier que  $h_u = \text{id}_P$  si et seulement si  $u = e$  ou  $u = -e$ . [S]
- (b) En déduire que, pour tout  $u, v$  de  $E$ , on a :  $h_u = h_v \Leftrightarrow (u = v \text{ ou } u = -v)$ . [S]
- (c) Déterminer les éléments  $h_u$  de  $\mathcal{H}$  qui sont des involutions de  $P$ . [S]

3. (a) Dans cette question, on suppose que  $u \neq \pm e$ . Ainsi  $h_u$  n'est pas l'identité de  $P$ .  
Montrer que  $h_u$  a un point fixe dans  $P$  (il existe  $z$  dans  $P$  tel que  $h_u(z) = z$ ) si et seulement si  $|a + d| < 2$ , et qu'alors ce point fixe est unique (on ne cherchera pas à l'explicitier.) [S]

- (b) Soit  $h_u$  une involution de  $P$ , distincte de l'identité (cf question II.2c).  
Calculer le point fixe de  $h_u$  dans  $P$ , en fonction de  $u = (a, b, c, d)$ . [S]
- (c) Préciser notamment les points fixes éventuels de  $h_u$  dans  $P$  si  $u = r(\theta)$  ou  $u = s(\theta)$ . [S]
- (d) Montrer finalement que les applications  $h$  de  $\mathcal{H}$  telles que  $h(i) = i$  sont exactement les applications  $h_u$ , avec  $u = r(\theta)$ , pour tout réel  $\theta$ . [S]

### Troisième partie

Pour simplifier, on note  $f_\theta = h_{r(\theta)}$  et  $g_t = h_{s(t)}$ .

Ainsi, pour tous réels  $\theta, t$ , et pour tout  $z$  de  $P$ ,  $f_\theta(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$  et  $g_t(z) = \frac{z \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{z \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$ .

Dans cette partie, on prouve que tout  $h$  de  $\mathcal{H}$  est de manière unique la composée, dans cet ordre, d'une application  $f_\theta$ , puis d'une application  $g_t$ , puis d'une homothétie  $z \mapsto \lambda z$  de rapport  $\lambda > 0$ .

1. Indiquer pourquoi les applications  $z \mapsto \lambda z$ , avec  $\lambda > 0$ , sont dans  $\mathcal{H}$ . [S]
2. Préciser à quelle condition sur  $\theta$  et  $\varphi$  on a  $f_\theta = f_\varphi$ . [S]
3. Soit  $\omega = x + iy$  un élément de  $P$ .  
Montrer qu'il existe un couple unique  $(t, \lambda)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $\omega = \lambda g_t(i)$ . [S]
4. Soit  $h$  un élément de  $\mathcal{H}$ .  
Montrer qu'il existe un triplet unique  $(\theta, \lambda, t)$  de  $[0, \pi[ \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$  tel que  $h = \lambda g_t \circ f_\theta$ . [S]

### Quatrième partie

On pose  $F = E \cap \mathbb{Z}^4 = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \delta(u) = ad - bc = 1\}$ .

On note  $\mathcal{K}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{H}$  formé des applications  $h_u$ , quand  $u$  parcourt  $F$ .

Il est clair que pour tous  $u, v$  de  $F$ ,  $u \otimes v$  et  $u'$  sont encore dans  $F$ . Il en découle que le composé de deux éléments de  $\mathcal{K}$  et que l'inverse d'un élément de  $\mathcal{K}$  sont encore des éléments de  $\mathcal{K}$ .

Dans cette partie,  $\omega$  est un élément fixé de  $P$ . On va s'intéresser aux images  $h(\omega)$  de  $\omega$  par les différentes applications  $h$  de  $\mathcal{K}$ , constater que la partie imaginaire des  $h(\omega)$  passe par une valeur maximum, et vérifier que ce maximum est notamment atteint en un point  $z = h(\omega)$  tel que  $|z| \geq 1$  et  $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}$ .

1. (a) Prouver que  $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2, |c\omega + d| \leq 1\}$  est un ensemble fini. [S]  
(b) En déduire que  $\{\operatorname{Im} h(\omega), h \in \mathcal{K}\}$  possède un maximum  $M(\omega)$ , avec  $M(\omega) \geq \operatorname{Im} \omega$ . [S]
2. On reprend les notations de la question précédente.  
En particulier, on désigne par  $k$  un élément de  $\mathcal{K}$  tel que  $\operatorname{Im} k(\omega) = M(\omega)$ .  
On note  $\varphi = h_{(0, -1, 1, 0)}$  et  $\tau = h_{(1, m, 0, 1)}$  (avec  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ ) qui sont toutes deux dans  $\mathcal{K}$ .  
(a) En considérant  $\varphi \circ k$ , montrer que  $|k(\omega)| \geq 1$ . [S]  
(b) En considérant  $\tau \circ k$ , montrer qu'il existe  $\ell$  dans  $\mathcal{K}$  tel que  $\begin{cases} \operatorname{Im} \ell(\omega) = M(\omega) \\ \operatorname{Re} \ell(\omega) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$  [S]  
(c) En déduire que  $M(z)$  est supérieur ou égal à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
Préciser le domaine du demi-plan  $P$  où se situe  $\ell(\omega)$ . [S]