

L'équation du troisième degré.

Le but du problème est la résolution de l'équation :

$$(E_1) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \quad a \neq 0$$

1. (a) Montrer qu'il existe h dans \mathbb{C} tel que le changement de variable $y = x + h$ transforme l'équation (E_1) en une équation $(E_2) : y^3 + py + q = 0, (p, q) \in \mathbb{C}^2$. [S]

(b) Que dire si $p = q = 0$? Dans la suite, on supposera $(p, q) \neq (0, 0)$. [S]

2. On note t' une solution non nulle dans \mathbb{C} de l'équation $(E_3) : t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.

Soit α une racine cubique de t' .

On pose $y_0 = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, y_1 = j\alpha - \frac{p}{3\alpha}j^2, y_2 = j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha}j$.

(a) Prouver $y_0 + y_1 + y_2 = 0, y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -2p$, et $y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2 = p$. [S]

(b) Montrer que $y_0y_1y_2 = -q$. [S]

(c) En déduire que y_0, y_1, y_2 sont les solutions de (E_2) dans \mathbb{C} . [S]

(d) Donner alors l'expression des solutions x_0, x_1, x_2 de (E_1) dans \mathbb{C} . [S]

3. On se place dans le cas particulier $q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$. Que dire de l'équation (E_3) ?
Montrer qu'on peut choisir α tel que $\alpha^2 = -\frac{p}{3}$.

Quelles solutions obtient-on alors pour l'équation (E_1) ? [S]

4. Dans cette question, on suppose que a, b, c, d sont réels. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

(a) Si $\Delta > 0$ montrer que (E_1) a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. [S]

(b) Si $\Delta < 0$, montrer que (E_1) a trois racines réelles. [S]

(c) Si $\Delta = 0$, montrer que (E_1) a une racine réelle simple et une racine réelle double. [S]

5. On suppose que a, b, c, d sont réels, avec $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$.

Montrer que $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $\cos 3\theta = \frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}}$.

Si φ est tel que $\cos \varphi = \cos 3\theta$, donner les solutions de (E_1) en fonction de φ, p, a, b . [S]

6. (a) Trouver les solutions de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 19 = 0$ à 10^{-3} près. [S]

(b) Résoudre $8x^3 + 12x^2 - 18x + 5 = 0$. [S]

(c) Résoudre $x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = 0$. [S]

7. On suppose que p et q sont des nombres réels.

En étudiant l'application $f : y \mapsto y^3 + py + q$, retrouver les résultats de la question (4), c'est-à-dire la nature des solutions de l'équation (E_2) en fonction du signe de $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ (en revanche, on ne cherchera pas ici à retrouver l'expression de ces solutions.) [S]

Corrigé du Problème

1. (a) Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 &\Leftrightarrow a(y-h)^3 + b(y-h)^2 + c(y-h) + d = 0 \\ &\Leftrightarrow ay^3 + (b-3ah)y^2 + (c-2bh+3ah^2)y + d - ch + bh^2 - ah^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^3 + \left(\frac{b}{a} - 3h\right)y^2 + \left(\frac{c-2bh}{a} + 3h^2\right)y + \frac{d-ch+bh^2}{a} - h^3 = 0 \end{aligned}$$

On voit qu'il faut poser $h = \frac{b}{3a}$ pour éliminer le terme en y^2 .

On a alors : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow y^3 + py + q = 0$, avec $y = x + h$, et $h = \frac{b}{3a}$.

Après calcul, $p = \frac{-b^2 + 3ca}{3a^2}$, et $q = \frac{2b^3 + 27da^2 - 9cba}{27a^3}$. [Q]

- (b) Si $p = q = 0$, $y = 0$ est solution triple de l'équation (2).

Dans ce cas $x = -h = -\frac{b}{3a}$ est solution triple de l'équation (E₁). [Q]

2. (a) Par hypothèse, α^3 vérifie (E₃), donc $\alpha^6 + q\alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

On remarque que $y_k = j^k \alpha - \frac{p}{3\alpha} j^{2k}$, pour k dans $\{1, 2, 3\}$.

Tout d'abord $y_0 + y_1 + y_2 = (1 + j + j^2)\alpha - \frac{p}{3\alpha}(1 + j^2 + j) = 0$.

Ensuite, pour tout k dans $\{1, 2, 3\}$:

$$y_k = j^k \alpha - \frac{p}{3\alpha} j^{2k} \Rightarrow y_k^2 = j^{2k} \alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} j^{4k} - \frac{2p}{3} j^{3k} = j^{2k} \alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} j^k - \frac{2p}{3}.$$

On en déduit $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = (1 + j + j^2)\left(\alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2}\right) - 2p = -2p$.

On remarque que $(y_0 + y_1 + y_2)^2 - (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2) = 2(y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2)$.

Il en découle $y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2 = p$. [Q]

- (b) On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y_0y_1y_2 &= \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right)\left(j\alpha - \frac{p}{3\alpha}j^2\right)\left(j^2\alpha - \frac{p}{3\alpha}j\right) = \left(\alpha - \frac{p}{3\alpha}\right)\left(\alpha^2 + \frac{p^2}{9\alpha^2} + \frac{p}{3}\right) \\ &= \alpha^3 + \frac{p^2}{9\alpha} + \frac{p\alpha}{3} - \frac{p\alpha}{3\alpha} - \frac{p^3}{27\alpha^3} - \frac{p^2}{9\alpha} = \alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} = -q \end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé l'égalité $\alpha^6 + q\alpha^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, donc $\alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} = -q$. [Q]

- (c) Notons $\sigma_1 = y_0 + y_1 + y_2$, $\sigma_2 = y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2$ et $\sigma_3 = y_0y_1y_2$.

Pour tout y de \mathbb{C} , $(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) = y^3 - \sigma_1y^2 + \sigma_2y - \sigma_3 = y^3 + py + q$.

Conclusion : y_0, y_1, y_2 sont les solutions de l'équation (2). [Q]

- (d) On en déduit une expression des solutions x_0, x_1, x_2 de (E₁) dans \mathbb{C} :

Pour tout k de $\{0, 1, 2\}$: $x_k = y_k - h = j^k \alpha - \frac{p}{3\alpha} j^{2k} - \frac{b}{3a}$. [Q]