Trajectoire d'une boule dans un billard circulaire

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule dans un billard circulaire.
Celui-ci est identifié au disque unité du plan complexe : $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$.
Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O : $\Gamma = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

Une boule (assimilée à un point) est lancée depuis le point A_0 de Γ d'affixe -1 avec un vecteur vitesse initial d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Sa trajectoire $\mathcal{T}$ est une succession infinie de segments séparant les points de contact successifs avec Γ. On négligera les frottements, et les chocs de la boule sur Γ seront supposés *parfaits* (deux segments de la trajectoire séparés par un contact en un point A de Γ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la normale en A à Γ.)

On note $\mathcal{C}$ la couronne circulaire formée des points $M(z)$ tels que : $\sin\theta \leq |z| \leq 1$.

Première partie

1. Soit A_n le point où a lieu le n-ième choc de la boule sur le bord du billard.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note a_n l'affixe du point A_n (par convention $a_0 = -1$).
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $a_n = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{2in\theta}$. [S]
2. Montrer que la trajectoire de la boule est incluse dans la couronne circulaire $\mathcal{C}$.
   Quelle est la longueur de chacun des segments composant cette trajectoire ? [S]
3. On suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Montrer que dans ce cas les points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts deux à deux (la trajectoire n'est donc pas fermée). [S]
4. On suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel, donc qu'il existe deux entiers positifs premiers entre eux p et q tels que $\theta = \frac{p}{q}\pi$.
   Montrer qu'alors la trajectoire $\mathcal{T}$ est fermée (le mouvement est périodique). [S]
5. Représenter $\mathcal{T}$ et calculer sa longueur lorsque $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. [S]
6. Rappeler la méthode vue en cours pour calculer la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$ à l'aide de radicaux.
   Représenter $\mathcal{T}$ et donner sa longueur si θ est dans $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right\}$. [S]

Deuxième partie

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On dit qu'une partie G de $\mathbb{R}$ est un *sous-groupe additif* de $\mathbb{R}$ si : $\begin{cases} G \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in G^2,\ x - y \in G \end{cases}$

1. Soit G un sous-groupe additif (on pourra abréger en *sga*) de $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que 0 est dans G, et que $x \in G \Rightarrow -x \in G$. [S]
   (b) Montrer que pour tous x et y de G, alors $x + y$ est dans G. [S]
   (c) Établir que pour tout a de G alors $a\mathbb{Z}$ est inclus dans G. [S]
   (d) Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, l'ensemble $a\mathbb{Z}$ est un *sga* de $\mathbb{R}$. [S]
2. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

(a) Montrer que G^+ est non vide. Justifier l'existence de $a = \inf G^+$ dans $\mathbb{R}^+$. [S]

(b) On suppose ici que a est strictement positif.

i. Montrer que a est élément de G (indication : raisonner par l'absurde, considérer l'intervalle $]a, 2a[$ et utiliser la caractérisation de la borne inférieure). [S]

ii. Montrer que G est inclus dans $a\mathbb{Z}$ (indication : pour tout x de G, justifier l'existence d'un k de $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - ka < a$). [S]

iii. En déduire que $G = a\mathbb{Z} = \{\ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots\}$ (G est dit *discret*). [S]

(c) Dans cette question, on suppose que a est nul.
Montrer que pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe z dans G tel que $x < z < y$.
(Indication : utiliser, après avoir justifié son existence, un élément t de $G \cap]0, y-x[$).
Une récurrence immédiate montre que $]x, y[$ contient une infinité d'éléments de G.
On exprime cette situation en disant que G est *dense* dans $\mathbb{R}$.
Cette propriété n'est bien sûr pas vérifiée par les ensembles $a\mathbb{Z}$. On a donc prouvé que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets, soit denses. [S]

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

On va montrer que pour tout point B de la couronne $\mathcal{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point M de la trajectoire $\mathcal{T}$ tel que $d(B, M) < \varepsilon$ (autrement dit : tout point de $\mathcal{C}$ peut être approché d'aussi près qu'on le veut par la trajectoire de la boule de billard : on exprime cette situation en disant que la trajectoire $\mathcal{T}$ est *dense* dans la couronne $\mathcal{C}$.)

1. On note $\varphi = 2\theta + \pi$ et on pose $G = \{n\varphi + 2m\pi,\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

   (a) Montrer que G est un *sga* dense dans $\mathbb{R}$ (pour la densité, raisonner par l'absurde). [S]

   (b) Montrer que pour tout x de G, l'écriture $x = n\varphi + 2m\pi$ (m, n dans $\mathbb{Z}$) est unique. [S]

2. On note H le sous-ensemble de G défini par $H = \{n\varphi + 2m\pi,\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$.
   On va montrer que H est encore une partie dense de $\mathbb{R}$ (au sens de la question II2c).
   Pour cela on se donne deux réels x, y avec $x < y$, et on pose $\delta = \frac{1}{3}(y - x)$.

   (a) Justifier l'existence d'un élément $g = n\varphi + 2m\pi$ de G dans $]x + \delta, y - \delta[$. [S]

   (b) Montrer qu'il existe un élément $h = n'\varphi + 2m'\pi$ de H dans $]-\delta, \delta\,[$, avec $n' \geq -n$.
   Indication : montrer qu'il existe une infinité de $\tilde{g} = \tilde{n}\varphi + 2\tilde{m}\pi$ dans $G \cap]-\delta, \delta\,[$ et que cela implique une infinité de valeurs possibles pour l'entier $\tilde{n}$. [S]

   (c) En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$ au sens de la question II2c. [S]

   (d) En déduire : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},\ |n\varphi + (2m+1)\pi - t| < \varepsilon$. [S]

3. (a) Montrer que pour tous réels x et y, on a $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$. [S]

   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout point B de Γ, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n tel que $d(A_n, B) < \varepsilon$. [S]

4. Généraliser le résultat de la question précédente à un point B de la couronne $\mathcal{C}$.
   Indication : mener par B une tangente au cercle intérieur de $\mathcal{C}$ et appliquer le résultat précédent à un des points d'intersection de cette tangente avec Γ. [S]

NB : ce problème est inspiré de l'épreuve de Maths 2 du concours 1998 de l'École Polytechnique (option PC).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.