

## Trajectoire d'une boule dans un billard circulaire

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule dans un billard circulaire.

Celui-ci est identifié au disque unité du plan complexe :  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .

Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre  $O$  :  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ .

Une boule (assimilée à un point) est lancée depuis le point  $A_0$  de  $\Gamma$  d'affixe  $-1$  avec un vecteur vitesse initial d'affixe  $e^{i\theta}$ , avec  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Sa trajectoire  $\mathcal{T}$  est une succession infinie de segments séparant les points de contact successifs avec  $\Gamma$ . On négligera les frottements, et les chocs de la boule sur  $\Gamma$  seront supposés *parfaits* (deux segments de la trajectoire séparés par un contact en un point  $A$  de  $\Gamma$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la normale en  $A$  à  $\Gamma$ .)

On note  $\mathcal{C}$  la couronne circulaire formée des points  $M(z)$  tels que :  $\sin \theta \leq |z| \leq 1$ .

### Première partie

- Soit  $A_n$  le point où a lieu le  $n$ -ième choc de la boule sur le bord du billard.  
Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $a_n$  l'affixe du point  $A_n$  (par convention  $a_0 = -1$ ).  
Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $a_n = (-1)^{n+1} e^{2in\theta}$ . [S]
- Montrer que la trajectoire de la boule est incluse dans la couronne circulaire  $\mathcal{C}$ .  
Quelle est la longueur de chacun des segments composant cette trajectoire? [S]
- On suppose que le quotient  $\frac{\theta}{\pi}$  est irrationnel. Montrer que dans ce cas les points  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont distincts deux à deux (la trajectoire n'est donc pas fermée). [S]
- On suppose que le quotient  $\frac{\theta}{\pi}$  est un nombre rationnel, donc qu'il existe deux entiers positifs premiers entre eux  $p$  et  $q$  tels que  $\theta = \frac{p}{q} \pi$ .  
Montrer qu'alors la trajectoire  $\mathcal{T}$  est fermée (le mouvement est périodique). [S]
- Représenter  $\mathcal{T}$  et calculer sa longueur lorsque  $\theta = \frac{\pi}{12}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . [S]
- Rappeler la méthode vue en cours pour calculer la valeur de  $\cos \frac{\pi}{10}$  à l'aide de radicaux.  
Représenter  $\mathcal{T}$  et donner sa longueur si  $\theta$  est dans  $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5} \right\}$ . [S]

### Deuxième partie

Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ , on note  $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ .

On dit qu'une partie  $G$  de  $\mathbb{R}$  est un *sous-groupe additif* de  $\mathbb{R}$  si :  $\begin{cases} G \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in G^2, x - y \in G \end{cases}$

- Soit  $G$  un sous-groupe additif (on pourra abréger en *sga*) de  $\mathbb{R}$ .
  - Vérifier que  $0$  est dans  $G$ , et que  $x \in G \Rightarrow -x \in G$ . [S]
  - Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  de  $G$ , alors  $x + y$  est dans  $G$ . [S]
  - Établir que pour tout  $a$  de  $G$  alors  $a\mathbb{Z}$  est inclus dans  $G$ . [S]
  - Montrer que pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $a\mathbb{Z}$  est un *sga* de  $\mathbb{R}$ . [S]
- Soit  $G$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  non réduit à  $\{0\}$ . On note  $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$ .

- (a) Montrer que  $G^+$  est non vide. Justifier l'existence de  $a = \inf G^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ . [S]
- (b) On suppose ici que  $a$  est strictement positif.
- i. Montrer que  $a$  est élément de  $G$  (indication : raisonner par l'absurde, considérer l'intervalle  $]a, 2a[$  et utiliser la caractérisation de la borne inférieure). [S]
  - ii. Montrer que  $G$  est inclus dans  $a\mathbb{Z}$  (indication : pour tout  $x$  de  $G$ , justifier l'existence d'un  $k$  de  $\mathbb{Z}$  tel que  $0 \leq x - ka < a$ ). [S]
  - iii. En déduire que  $G = a\mathbb{Z} = \{\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots\}$  ( $G$  est dit *discret*). [S]
- (c) Dans cette question, on suppose que  $a$  est nul.
- Montrer que pour tous réels  $x, y$  avec  $x < y$ , il existe  $z$  dans  $G$  tel que  $x < z < y$ .  
(Indication : utiliser, après avoir justifié son existence, un élément  $t$  de  $G \cap ]0, y - x[$ .)  
Une récurrence immédiate montre que  $]x, y[$  contient une infinité d'éléments de  $G$ .  
On exprime cette situation en disant que  $G$  est *dense* dans  $\mathbb{R}$ .  
Cette propriété n'est bien sûr pas vérifiée par les ensembles  $a\mathbb{Z}$ . On a donc prouvé que les sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  sont soit discrets, soit denses. [S]

### Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que le quotient  $\frac{\theta}{\pi}$  est irrationnel.

On va montrer que pour tout point  $B$  de la couronne  $\mathcal{C}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un point  $M$  de la trajectoire  $\mathcal{T}$  tel que  $d(B, M) < \varepsilon$  (autrement dit : tout point de  $\mathcal{C}$  peut être approché d'aussi près qu'on le veut par la trajectoire de la boule de billard : on exprime cette situation en disant que la trajectoire  $\mathcal{T}$  est *dense* dans la couronne  $\mathcal{C}$ .)

1. On note  $\varphi = 2\theta + \pi$  et on pose  $G = \{n\varphi + 2m\pi, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ .
  - (a) Montrer que  $G$  est un *sga* dense dans  $\mathbb{R}$  (pour la densité, raisonner par l'absurde). [S]
  - (b) Montrer que pour tout  $x$  de  $G$ , l'écriture  $x = n\varphi + 2m\pi$  ( $m, n$  dans  $\mathbb{Z}$ ) est unique. [S]
2. On note  $H$  le sous-ensemble de  $G$  défini par  $H = \{n\varphi + 2m\pi, (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ .  
On va montrer que  $H$  est encore une partie dense de  $\mathbb{R}$  (au sens de la question II2c).  
Pour cela on se donne deux réels  $x, y$  avec  $x < y$ , et on pose  $\delta = \frac{1}{3}(y - x)$ .
  - (a) Justifier l'existence d'un élément  $g = n\varphi + 2m\pi$  de  $G$  dans  $]x + \delta, y - \delta[$ . [S]
  - (b) Montrer qu'il existe un élément  $h = n'\varphi + 2m'\pi$  de  $H$  dans  $]-\delta, \delta[$ , avec  $n' \geq -n$ .  
Indication : montrer qu'il existe une infinité de  $\tilde{g} = \tilde{n}\varphi + 2\tilde{m}\pi$  dans  $G \cap ]-\delta, \delta[$  et que cela implique une infinité de valeurs possibles pour l'entier  $\tilde{n}$ . [S]
  - (c) En déduire que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$  au sens de la question II2c. [S]
  - (d) En déduire :  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, |n\varphi + (2m+1)\pi - t| < \varepsilon$ . [S]
3. (a) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a  $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$ . [S]  
(b) Déduire de ce qui précède que pour tout point  $B$  de  $\Gamma$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que  $d(A_n, B) < \varepsilon$ . [S]
4. Généraliser le résultat de la question précédente à un point  $B$  de la couronne  $\mathcal{C}$ .  
Indication : mener par  $B$  une tangente au cercle intérieur de  $\mathcal{C}$  et appliquer le résultat précédent à un des points d'intersection de cette tangente avec  $\Gamma$ . [S]

NB : ce problème est inspiré de l'épreuve de Maths 2 du concours 1998 de l'École Polytechnique (option PC).