Équations différentielles : quatre exercices indépendants

I. Une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=x$.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H) : x(x^2-1)y'(x)+2y(x)=0$ l'équation homogène associée à (E).

1. Préciser la nature de (E), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre. [S]
2. Donner la solution générale de (H) sur l'intervalle de résolution I. [S]
3. Donner la solution générale de (E) sur l'intervalle de résolution I. [S]
4. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-1,1[$. [S]
5. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-\infty,0[$. [S]
6. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]0,+\infty[$. [S]
7. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? [S]

II. Une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle $(E_a) : y''(x)-(a+1)y'(x)+ay(x)=d(x)$, où $a\in\mathbb{R}$, et où $x\mapsto d(x)$ est une application continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H_a) : y''(x)-(a+1)y'(x)+ay(x)=0$ l'équation homogène associée à (E_a).

1. Préciser la nature de (E_a), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre.
   Indiquer brièvement la forme que prend la solution générale de (E_a) sur I (notamment en fonction de la solution générale de (H_a) sur I). [S]
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée (H_a) sur I.
   Dans cette question (comme dans la suivante) on discutera suivant les valeurs de a. [S]
3. Dans cette question, on pose $d(x)=x\mathrm{e}^{a^2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I. [S]
4. Dans cette question, on suppose $a=-1$ et on pose $d(x)=\operatorname{th} x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I. [S]
5. On considère l'équation différentielle $(E') : t^2z''(t)+tz'(t)-z(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ où z est une fonction inconnue à valeurs réelles, définie sur un intervalle J.
   On cherche à résoudre (E) sur $J=\mathbb{R}^{-*}$ ou sur $J=\mathbb{R}^{+*}$.
   On pose le changement de variable $t=\varepsilon\,\mathrm{e}^x$, où x parcourt $\mathbb{R}$ et $\begin{cases}\varepsilon=-1 & \text{si } J=\mathbb{R}^{-*}\\ \varepsilon=1 & \text{si } J=\mathbb{R}^{+*}\end{cases}$
   On définit ainsi une application $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $y(x)=z(t)$.
   (a) Montrer que l'application $t\mapsto z(t)$ satisfait à (E') sur J si et seulement si l'application $x\mapsto y(x)$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation étudiée à la question précédente. [S]
   (b) En déduire l'expression de la solution générale de (E') sur J. [S]
   (c) L'équation (E') possède-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
   On admettra que $\varphi : t\mapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(0)=0$. [S]

III. Une équation fonctionnelle

On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :
– L'application f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
– Pour tous x, y de $\mathbb{R}$: $\quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (E)$
L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

1. Déterminer les applications constantes qui sont solution du problème $\mathcal{P}$.
2. Dans cette question, soit f une solution *non constante* de $\mathcal{P}$. On pose $a = f''(0)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) Montrer que $f'(0) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = af(x)$.
   Indication : dériver (E) par rapport à x (y fixé) et par rapport à y (x fixé).
3. Déduire de ce qui précède toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

IV. Une équation différentielle avec "conditions initiales"

Soit $x \mapsto a(x)$ une application définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.
On dit qu'une application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :
– L'application $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$.
– Elle est solution de l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ sur $[0, 1]$.
– Elle satisfait aux conditions $y(0) = y(1) = 0$.

1. Dans le cas où l'application $x \mapsto a(x)$ est constante ($a(x) = \lambda$ pour tout x de $[0, 1]$) montrer que la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle, sauf pour certaines valeurs de la constante λ, que l'on précisera.
2. Si $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une application continue, on définit l'application $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par :
   $\forall x \in [0, 1],\ \Phi(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - x\int_1^x (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$
   (a) Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et que $(S) \begin{cases} \forall x \in [0, 1],\ \Phi''(x) = -\varphi(x) \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0 \end{cases}$
   (b) Réciproquement, soit $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $[0, 1]$.
   Montrer que si ψ est solution du système (S), alors $\psi(x) = \Phi(x)$ sur $[0, 1]$.
3. En déduire que l'application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si :
   (E) : $\quad \forall x \in [0, 1],\ y(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,a(t)y(t)dt - x\int_1^x (1-t)a(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$
4. Soit $x \mapsto y(x)$ une application continue sur $[0, 1]$.
   On pose $m = \max\limits_{[0,1]} |a(x)|$ et $M = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.
   Montrer que si $x \mapsto y(x)$ vérifie (E) alors $|y(x)| \le \frac{1}{8} mM$ pour tout x de $[0, 1]$.
5. En déduire que si $m < \frac{1}{8}$ alors la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle.