

## Un peu de géométrie du triangle

Le plan euclidien orienté est identifié à  $\mathbb{C}$ . Par exemple, si  $a$  est un nombre complexe, et plutôt que d'évoquer le point  $A$  d'affixe  $a$ , on parlera simplement du point  $a$ .

On va prouver des propriétés géométriques du triangle, invariantes dans toute similitude. On ne perd donc aucune généralité à considérer un triangle  $T$  inscrit dans le cercle unité  $\mathcal{U} = \{z, |z| = 1\}$ , c'est-à-dire défini par trois points distincts  $a, b, c$  tels que  $|a| = |b| = |c| = 1$ .

Uniquement pour les figures on prendra  $a = \exp(-\frac{11i\pi}{12})$ ,  $b = \exp(-\frac{i\pi}{12})$ , et  $c = \exp(\frac{5i\pi}{8})$ .

### I. La droite d'Euler

1. On pose  $s = a + b$  et  $h = a + b + c$ . Montrer que  $0, s, h, c$  forment un parallélogramme. En déduire que les hauteurs du triangle  $T$  se coupent au point  $h$ . [S]
2. Uniquement dans cette question, on suppose  $a + b + c = 0$ . Montrer que  $ab + ac + bc = 0$  et en déduire que  $a, b, c$  sont les trois racines cubiques d'un même nombre complexe de module 1. Qu'en déduit-on concernant le triangle  $T$ ? [S]
3. Soit  $m$  l'équibarycentre de  $a, b, c$ . Montrer que les points  $0, m, h$  sont alignés (et confondus  $\Leftrightarrow T$  est équilatéral). [S]
4. Si  $T$  n'est pas équilatéral, la droite  $E$  contenant  $0, m, h$  est appelée *droite d'Euler* de  $T$ . Montrer qu'alors :  $z \in E \Leftrightarrow \bar{h}z - h\bar{z} = 0$  (c'est donc l'équation de  $E$ ). [S]
5. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

### II. Deux propriétés classiques de l'orthocentre

1. Identifier les symétriques de  $h$  par rapport aux milieux des cotés du triangle  $T$  et vérifier que ce sont éléments du cercle circonscrit  $\mathcal{U}$ . [S]
2. Montrer que la symétrie orthogonale  $\sigma$  par rapport à la droite  $(ab)$  est l'application qui à tout point  $z$  associe le point  $z' = -ab\bar{z} + a + b$ . Caractériser de manière analogue la projection orthogonale sur la droite  $(ab)$ . [S]
3. Prouver que les symétriques de  $h$  par rapport aux cotés de  $T$  sont sur  $\mathcal{U}$ . [S]
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

### III. Le triangle orthique

On note  $\alpha, \beta, \gamma$  les projetés respectifs du point  $h$  sur les droites  $(bc), (ca), (ab)$  (c'est-à-dire les pieds des hauteurs au triangle  $T$  issues respectivement des sommets  $a, b, c$ .)

On dit que le triangle  $H = \alpha\beta\gamma$  est le *triangle orthique* de  $T$ .

On supposera ici que le triangle  $T$  n'est pas rectangle, pour que  $\alpha, \beta, \gamma$  soient distincts.

1. Montrer que  $\alpha = \frac{1}{2}(h - \bar{a}bc)$  (utiliser (II.2)). Donner les expressions de  $\beta$  et  $\gamma$ . [S]
2. Dédire de ces expressions de  $\alpha, \beta, \gamma$  que les droites  $(0a), (0b)$  et  $(0c)$  sont respectivement orthogonales aux droites  $(\beta\gamma), (\alpha\gamma)$ , et  $(\alpha\beta)$ . [S]

3. Montrer que la droite  $(\gamma c)$  est bissectrice des droites  $(\gamma \alpha)$  et  $(\gamma \beta)$ .

Indication : pour établir  $(\widehat{\gamma \alpha, \gamma c}) = (\widehat{\gamma c, \gamma \beta}) [\pi]$ , on utilisera en le justifiant le fait que  $a, \gamma, \alpha, c$  sont cocycliques, ainsi que  $a, \gamma, h, \beta$ .

En déduire que si les angles de  $T$  sont aigus, le triangle orthique est la trace d'un faisceau lumineux ou à la trajectoire d'une boule de billard ;-) inscrite dans le triangle  $T$ . [S]

4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

#### IV. Le cercle d'Euler, ou cercle des neuf points

On appelle *cercle d'Euler* du triangle  $T$  le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit aux milieux des cotés de  $T$  (et le triangle joignant ces trois points est appelé le *triangle médian* de  $T$ .)

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  a pour centre  $k = \frac{1}{2} h$  et pour rayon  $\frac{1}{2}$ .

Par quelle homothétie de rapport positif le cercle  $\mathcal{C}$  se déduit-il de  $\mathcal{U}$ ? [S]

2. Montrer que le cercle  $\mathcal{C}$  contient (outre les milieux des cotés de  $T$ .)

(a) Les milieux des segments  $[ha]$ ,  $[hb]$   $[hc]$ . [S]

(b) Les points  $\alpha, \beta, \gamma$ , pieds des hauteurs menées de  $a, b, c$  au triangle  $T$ . [S]

Ces propriétés justifient que  $\mathcal{C}$  soit appelé *cercle des neuf points* du triangle  $T$ .

3. Faire une figure montrant  $\mathcal{U}, T, \mathcal{C}$  et les trois triangles dont  $\mathcal{C}$  est le cercle circonscrit.

4. Dans cette question,  $T$  est supposé non rectangle. Le point  $h$  est donc distinct de  $a, b, c$ .

(a) Quels sont les orthocentres des triangles  $hab$ ,  $hbc$  et  $hac$ ? [S]

(b) En déduire que ces trois triangles ont le même cercle d'Euler que le triangle  $T$ . [S]

(c) Indiquer comment les cercles circonscrits à  $hab$ ,  $hbc$  et  $hac$  se déduisent de  $\mathcal{U}$ . [S]

(d) Montrer que le résultat de IV.4.c est aussi une conséquence de celui de II.3. [S]

(e) Faire une figure illustrant le résultat de cette question.

#### V. Une propriété caractéristique du triangle orthique

Dans cette partie, on suppose que tous les angles du triangle  $T$  sont aigus.

On note  $u$  (resp.  $v, w$ ) un point quelconque du segment  $[ab]$  (resp.  $[ac], [bc]$ ).

Soit  $\Delta$  le triangle de sommets  $u, v, w$ . Il est donc inscrit dans le triangle  $T$ .

On va montrer son périmètre  $\psi(\Delta)$  est minimum quand  $\Delta$  est le triangle orthique de  $T$ .

1. On note  $x$  (resp.  $y$ ) le symétrique de  $u$  par rapport à la droite  $(ca)$  (resp.  $(cb)$ ).

Le segment  $[xy]$  coupe le segment  $[ac]$  en  $u'$  et le segment  $[bc]$  en  $u''$ .

(a) Montrer que si  $u$  est fixé, le périmètre de  $\Delta$  est minimum quand  $v = u'$  et  $w = v'$ . [S]

(b) Montrer que la valeur de ce minimum est  $|b - a| |c - u|$ . [S]

2. Comme dans les parties III et IV, on note  $\alpha, \beta, \gamma$  les pieds des hauteurs au triangle  $T$  issues respectivement des sommets  $a, b, c$ .

(a) Montrer que si  $u = \alpha$ , alors  $u' = \beta$  et  $u'' = \gamma$ . [S]

(b) En déduire le triangle orthique est le triangle de périmètre minimum inscrit dans  $T$ . [S]