

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Corrigé](#)]

Montrer que tout n de \mathbb{N} , on a $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$.

EXERCICE 2 [[Corrigé](#)]

Montrer que pour tous a, b de \mathbb{N}^* on a $\left| \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| > \frac{1}{4b^2}$.

EXERCICE 3 [[Corrigé](#)]

Soient a, b, c des nombres réels. Pour tout x de \mathbb{R} , on pose $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$.
On suppose que $|P(x)| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], |P'(x)| \leq 4$.

EXERCICE 4 [[Corrigé](#)]

Pour tout n de \mathbb{N} , calculer le minimum de $x \mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^n |x - k|$.
Préciser quel(s) x ce minimum est atteint.

EXERCICE 5 [[Corrigé](#)]

Soit a, b, c les trois cotés d'un triangle. Montrer que $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^3+b^3+c^3)+4abc$.

EXERCICE 6 [[Corrigé](#)]

Soit \mathcal{S} une famille finie de segments de \mathbb{R} telle que : $\forall (I, J) \in \mathcal{S}^2, I \cap J \neq \emptyset$.
Montrer que l'intersection de tous les segments I de \mathcal{S} est non vide.

EXERCICE 7 [[Corrigé](#)]

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x$.

EXERCICE 8 [[Corrigé](#)]

Soient α et β deux nombres irrationnels strictement positifs tels que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
Montrer que $A = \{[n\alpha], n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{[n\beta], n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de \mathbb{N}^* .

EXERCICE 9 [[Corrigé](#)]

Montrer que l'ensemble $E = \{2^p 3^q, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans \mathbb{R}^+ .
Indication : prouver que $F = \{p \ln 2 + q \ln 3, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .



EXERCICE 10 [Corrigé]

On note $f(n)$ le plus grand diviseur impair de n . Montrer que : $\forall n \geq 1, \left| \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| < 1$.

EXERCICE 11 [Corrigé]

On suppose que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$, avec (a, b, c) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Montrer que $|b| \leq 8$ et que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

EXERCICE 12 [Corrigé]

Trouver les applications de $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans \mathbb{R} telles que : $\forall x \in E, f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x$.

EXERCICE 13 [Corrigé]

Montrer que $x = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ est un nombre irrationnel.

EXERCICE 14 [Corrigé]

Soient a, b, c dans \mathbb{Z} (non tous nuls) avec $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-20}$. Montrer qu'il existe de tels entiers tels que $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

EXERCICE 15 [Corrigé]

Trouver le maximum de $\sin^2 x \sin 2x$ sur $[0, \pi]$. En déduire $\left| \prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x \right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

EXERCICE 16 [Corrigé]

Trouver le minimum de la somme $\sum_{k=1}^n x_k$ si on suppose $\prod_{k=1}^n x_k = \alpha > 0$ (les x_k étant > 0 .)

EXERCICE 17 [Corrigé]

Soit $f : x \mapsto x + [\sqrt{x}]$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = m \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que l'un au moins des u_n est le carré d'un entier.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Posons $q = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$, et par l'absurde supposons $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor \geq q+1$.
 Alors $\sqrt{4n+1} < q+1 \leq \sqrt{4n+2}$ donc $4n+1 < q^2+2q+1 \leq 4n+2$.
 Puisque tous sont ici des entiers la seule possibilité est $4n+2 = q^2+2q+1 = (q+1)^2$.
 Or $\begin{cases} (q+1)^2 \equiv 1 \pmod{4} & \text{si } q \text{ est pair} \\ (q+1)^2 \equiv 0 \pmod{4} & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$. On n'a donc jamais comme ici $(q+1)^2 \equiv 2 \pmod{4}$.
 Il en découle l'égalité des parties entières : $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$.
 – On a $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n^2+n}$. Mais $n \leq \sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$.
 Ainsi $\sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ donc $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.
 Avec le résultat de la première question, on obtient : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Par l'absurde, supposons qu'on ait $\left| \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{4b^2}$.
 Remarquons (cela sert à la ligne suivante) qu'alors $\left| \frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{4b^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{4} + \sqrt{2} < 2$.
 Ainsi $\left| \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \left| \frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| < \frac{1}{2b^2}$.
 Il en résulte $|2a^2 - b^2| < 1$ donc $2a^2 = b^2$ car a et b sont entiers.
 Mais cela implique $\sqrt{2} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Ainsi : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| > \frac{1}{4b^2}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- L'application $x \mapsto P'(x) = 2ax + b$ est affine.
 Pour prouver $|P'(x)| \leq 4$ sur $[-1, 1]$, il suffit donc de l'établir pour $x = -1$ et pour $x = 1$.
 Tout revient à prouver $\begin{cases} |2a - b| \leq 4 \\ |2a + b| \leq 4 \end{cases}$. Mais $\begin{cases} P(-1) = a - b + c \\ P(0) = c \\ P(1) = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{P(1)+P(-1)}{2} - P(0) \\ b = \frac{P(1)-P(-1)}{2} \end{cases}$
 On en déduit $2a + b = \frac{3P(1)+P(-1)}{2} - 2P(0)$ et $2a - b = \frac{P(1)+3P(-1)}{2} - 2P(0)$.
 On a $|P(-1)| \leq 1$, $|P(0)| \leq 1$ et $|P(1)| \leq 1$ par hypothèse.
 On en déduit $\begin{cases} |2a + b| \leq \frac{3|P(1)|+|P(-1)|}{2} + 2|P(0)| \leq 4 \\ |2a - b| \leq \frac{|P(1)|+3|P(-1)|}{2} + 2|P(0)| \leq 4 \end{cases}$, ce qu'il fallait démontrer.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On note que pour tout x de \mathbb{R}^- , $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (k - x) = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)x$.

De même : $\forall x \geq n$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (x - k) = (n+1)x - \frac{n(n+1)}{2}$.

L'application S_n est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Ainsi le minimum de S_n est nécessairement atteint sur $[0, n]$.

Fixons x dans $[0, n[$ et soit $m = [x]$. On a $m \leq x < m+1$ donc $|x - k| = \begin{cases} x - k & \text{si } k \leq m \\ k - x & \text{si } k > m \end{cases}$

Ainsi $S_n(x) = \sum_{k=0}^m (x - k) + \sum_{k=m+1}^n (k - x) = \frac{n(n+1)}{2} - m(m+1) + (2m+1 - n)x$

On en déduit que l'application S_n est :

- strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m < \frac{1}{2}(n-1)$.
- constante sur $[m, m+1[$ si $m = \frac{1}{2}(n-1)$ (ce qui suppose que n soit impair.)
- strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m > \frac{1}{2}(n-1)$.

On distingue deux cas selon la parité de n :

- Si n est pair ($n = 2p$), S_n décroît strictement sur $[0, p]$ et croît strictement sur $[p, n]$.

Le minimum de S_n est atteint en l'unique point $x = p$ et vaut $S_{2p}(p) = p^2 + p = \frac{1}{4}(n^2 + 2n)$.

- Si n est impair ($n = 2p+1$), l'application S_n est strictement décroissante sur $[0, p]$, constante sur $[p, p+1]$ et elle est strictement croissante sur $[p, n]$.

Sa valeur minimum est donc la valeur constante qu'elle prend sur l'intervalle $[p, p+1]$.

Cette valeur est $S_{2p+1}(p) = (p+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2$.

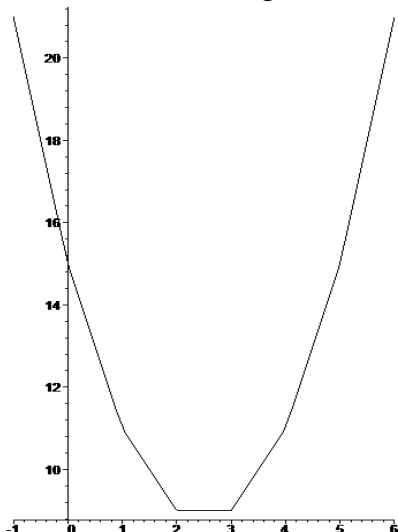
Les résultats précédents sont assez clairs lorsqu'on visualise la courbe représentative de S_n .

S_n est en effet affine par morceaux, convexe, et la droite $x = \frac{n}{2}$ est axe de symétrie vertical.

Voici d'ailleurs les courbes représentatives de S_4 et de S_5 :

```
> S:=(n::nonnegint)->(x->sum(abs(x-k),k=0..n));
```

```
> plot(S(5),-1..6,scaling=constrained);
```



```
> plot(S(6),-1..7,scaling=constrained);
```

