Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Corrigé]

Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, on a $\left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$ et $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

EXERCICE 2 [Corrigé]

Montrer que pour tous a, b de $\mathbb{N}^*$ on a $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{4b^2}$.

EXERCICE 3 [Corrigé]

Soient a, b, c des nombres réels. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$.
On suppose que $|P(x)| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1],\ |P'(x)| \leq 4$.

EXERCICE 4 [Corrigé]

Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer le minimum de $x \mapsto S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} |x - k|$.
Préciser quel(s) x ce minimum est atteint.

EXERCICE 5 [Corrigé]

Soit a, b, c les trois cotés d'un triangle. Montrer que $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^3+b^3+c^3)+4abc$.

EXERCICE 6 [Corrigé]

Soit $\mathcal{S}$ une famille finie de segments de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (I, J) \in \mathcal{S}^2,\ I \cap J \neq \emptyset$.
Montrer que l'intersection de tous les segments I de $\mathcal{S}$ est non vide.

EXERCICE 7 [Corrigé]

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

EXERCICE 8 [Corrigé]

Soient α et β deux nombres irrationnels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.
Montrer que $A = \{[n\alpha],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{[n\beta],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 9 [Corrigé]

Montrer que l'ensemble $E = \{2^p 3^q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.
Indication : prouver que $F = \{p \ln 2 + q \ln 3, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 [Corrigé]

On note $f(n)$ le plus grand diviseur impair de n. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} - \frac{2n}{3}\right| < 1$.

Exercice 11 [Corrigé]

On suppose que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$, avec (a, b, c) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
Montrer que $|b| \leq 8$ et que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Exercice 12 [Corrigé]

Trouver les applications de $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in E,\ f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x$.

Exercice 13 [Corrigé]

Montrer que $x = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 14 [Corrigé]

Soient a, b, c dans $\mathbb{Z}$ (non tous nuls) avec $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| > 10^{-20}$.
Montrer qu'il existe de tels entiers tels que $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$.

Exercice 15 [Corrigé]

Trouver le maximum de $\sin^2 x \sin 2x$ sur $[0, \pi]$. En déduire $\left|\prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x\right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Exercice 16 [Corrigé]

Trouver le minimum de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$ si on suppose $\prod_{k=1}^{n} x_k = \alpha > 0$ (les x_k étant > 0.)

Exercice 17 [Corrigé]

Soit $f : x \mapsto x + [\sqrt{x}]$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = m \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que l'un au moins des u_n est le carré d'un entier.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– Posons $q = \left[\sqrt{4n+1}\right]$, et par l'absurde supposons $\left[\sqrt{4n+2}\right] \geq q+1$.
  Alors $\sqrt{4n+1} < q+1 \leq \sqrt{4n+2}$ donc $4n+1 < q^2+2q+1 \leq 4n+2$.
  Puisque tous sont ici des entiers la seule possibilité est $4n+2 = q^2+2q+1 = (q+1)^2$.
  Or $\begin{cases} (q+1)^2 \equiv 1\ [4] & \text{si } q \text{ est pair} \\ (q+1)^2 \equiv 0\ [4] & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$. On n'a donc jamais comme ici $(q+1)^2 \equiv 2\ [4]$.
  Il en découle l'égalité des parties entières : $\left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.
– On a $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}$. Mais $n \leq \sqrt{n^2+n} < n+\frac{1}{2}$.
  Ainsi $\sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ donc $\left[\sqrt{4n+1}\right] \leq \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] \leq \left[\sqrt{4n+2}\right]$.
  Avec le résultat de la première question, on obtient : $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, supposons qu'on ait $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{4b^2}$.

Remarquons (cela sert à la ligne suivante) qu'alors $\left|\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{4b^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{4} + \sqrt{2} < 2$.

Ainsi $\left|\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \left|\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| < \frac{1}{2b^2}$.

Il en résulte $|2a^2 - b^2| < 1$ donc $2a^2 = b^2$ car a et b sont entiers.

Mais cela implique $\sqrt{2} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Ainsi : $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{4b^2}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

L'application $x \mapsto P'(x) = 2ax + b$ est affine.

Pour prouver $|P'(x)| \leq 4$ sur $[-1, 1]$, il suffit donc de l'établir pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

Tout revient à prouver $\begin{cases} |2a-b| \leq 4 \\ |2a+b| \leq 4 \end{cases}$. Mais $\begin{cases} P(-1) = a-b+c \\ P(0) = c \\ P(1) = a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{P(1)+P(-1)}{2} - P(0) \\ b = \frac{P(1)-P(-1)}{2} \end{cases}$

On en déduit $2a+b = \frac{3P(1)+P(-1)}{2} - 2P(0)$ et $2a-b = \frac{P(1)+3P(-1)}{2} - 2P(0)$.

On a $|P(-1)| \leq 1$, $|P(0)| \leq 1$ et $|P(1)| \leq 1$ par hypothèse.

On en déduit $\begin{cases} |2a+b| \leq \frac{3|P(1)|+|P(-1)|}{2} + 2\,|P(0)| \leq 4 \\ |2a-b| \leq \frac{|P(1)|+3|P(-1)|}{2} + 2\,|P(0)| \leq 4 \end{cases}$, ce qu'il fallait démontrer.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On note que pour tout x de $\mathbb{R}^-$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-x) = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)x$.

De même : $\forall\, x \geq n,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(x-k) = (n+1)x - \frac{n(n+1)}{2}$.

L'application S_n est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Ainsi le minimum de S_n est nécessairement atteint sur $[0, n]$.

Fixons x dans $[0, n[$ et soit $m = [x]$. On a $m \leq x < m+1$ donc $|x-k| = \begin{cases} x-k & \text{si } k \leq m \\ k-x & \text{si } k > m \end{cases}$

Ainsi $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(x-k) + \sum_{k=m+1}^{n}(k-x) = \frac{n(n+1)}{2} - m(m+1) + (2m+1-n)x$

On en déduit que l'application S_n est :

– strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m < \frac{1}{2}(n-1)$.

– constante sur $[m, m+1[$ si $m = \frac{1}{2}(n-1)$ (ce qui suppose que n soit impair.)

– strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m > \frac{1}{2}(n-1)$.

On distingue deux cas selon la parité de n :

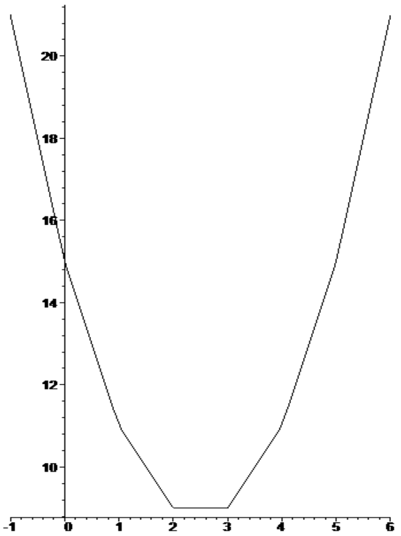
– Si n est pair ($n = 2p$), S_n décroit strictement sur $[0, p]$ et croit strictement sur $[p, n]$.
  Le minimum de S_n est atteint en l'unique point $x = p$ et vaut $S_{2p}(p) = p^2 + p = \frac{1}{4}(n^2 + 2n)$.

– Si n est impair ($n = 2p+1$), l'application S_n est strictement décroissante sur $[0, p]$, constante sur $[p, p+1]$ et et elle est strictement croissante sur $[p, n]$.
  Sa valeur minimum est donc la valeur constante qu'elle prend sur l'intervalle $[p, p+1]$.
  Cette valeur est $S_{2p+1}(p) = (p+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2$.

Les résultats précédents sont assez clairs lorsqu'on visualise la courbe représentative de S_n.
S_n est en effet affine par morceaux, convexe, et la droite $x = \frac{n}{2}$ est axe de symétrie vertical.
Voici d'ailleurs les courbes représentatives de S_4 et de S_5 :

```
> S:=(n::nonnegint)->(x->sum(abs(x-k),k=0..n));
```

```
> plot(S(5),-1..6,scaling=constrained);
```




```
> plot(S(6),-1..7,scaling=constrained);
```