Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Déterminer les polynômes définis par $P_0(x) = 1$ et $P_n(x) = n\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t+1)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.

Exercice 2 [Corrigé]

On définit $\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_1(x) = x - 2 \\ P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) + (1-x)P_n(x) \end{cases}$. Donner l'expression de $P_n(x)$ pour tout n.

Exercice 3 [Corrigé]

On se donne une famille impaire $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ de nombres complexes de module 1 et de partie réelle positive ou nulle. Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{2n+1}| \geq 1$. Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 4 [Corrigé]

On se donne une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Par récurrence sur n, montrer $m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n$ (et en particulier $f(n) \geq n$.)
2. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f(n) < n+1$ pour tout n, et en déduire l'unique solution f du problème.

Exercice 5 [Corrigé]

Pour toute partie A finie non vide de $\mathbb{N}$, on note $p(A)$ l'inverse du produit des éléments de A.
Calculer $u_n = \sum p(A)$, où la somme est étendue aux parties non vides de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 6 [Corrigé]

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit $n+2$ nombres distincts dans $E_n = \{1, \ldots, 2n\}$.
Montrer que l'au au moins est égal à la somme de deux autres.
Est-ce encore vrai si on en choisit seulement $n+1$?

Exercice 7 [Corrigé]

On définit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 = 1$ et $\begin{cases} a_{2n+1} = a_n \\ a_{2n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$.
Soient r et s deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe n tel que $a_n = r$ et $a_{n+1} = s$.
Indication : récurrence forte sur la valeur de $r + s$.

Exercice 8 [Corrigé]

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 > 0$ et par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \geq 0$.
Calculer u_n pour tout n en fonction u_0, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Exercice 9 [Corrigé]

On écrit à la suite tous les entiers de 1 jusqu'à 2004.

On les efface de 3 en 3, en commençant par le premier (on efface donc 1, 4, 7, etc.)

On recommence alors la même opération sur la liste restante, et ainsi de suite.

On note a_n l'entier qui est en tête après n itérations ($a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, \cdots$)

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n (indication : discuter suivant la parité de a_n.)

Combien d'itérations faut-il pour que la liste initiale soit complètement effacée ?

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.