



## Énoncés des exercices

## EXERCICE 1 [Corrigé]

Déterminer les polynômes définis par  $P_0(x) = 1$  et  $P_n(x) = n \int_0^x P_{n-1}(t+1) dt$  pour  $n \geq 1$ .

## EXERCICE 2 [Corrigé]

On définit  $\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_1(x) = x - 2 \\ P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) + (1-x)P_n(x) \end{cases}$ . Donner l'expression de  $P_n(x)$  pour tout  $n$ .

## EXERCICE 3 [Corrigé]

On se donne une famille impaire  $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}$  de nombres complexes de module 1 et de partie réelle positive ou nulle. Montrer que  $|z_1 + z_2 + \dots + z_{2n+1}| \geq 1$ . Peut-il y avoir égalité?

## EXERCICE 4 [Corrigé]

On se donne une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

1. Par récurrence sur  $n$ , montrer  $m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n$  (et en particulier  $f(n) \geq n$ .)
2. En déduire que  $f$  est strictement croissante.
3. Montrer que  $f(n) < n + 1$  pour tout  $n$ , et en déduire l'unique solution  $f$  du problème.

## EXERCICE 5 [Corrigé]

Pour toute partie  $A$  finie non vide de  $\mathbb{N}$ , on note  $p(A)$  l'inverse du produit des éléments de  $A$ . Calculer  $u_n = \sum p(A)$ , où la somme est étendue aux parties non vides de  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

## EXERCICE 6 [Corrigé]

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On choisit  $n + 2$  nombres distincts dans  $E_n = \{1, \dots, 2n\}$ . Montrer que l'un au moins est égal à la somme de deux autres. Est-ce encore vrai si on en choisit seulement  $n + 1$ ?

## EXERCICE 7 [Corrigé]

On définit une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  par  $a_0 = 1$  et  $\begin{cases} a_{2n+1} = a_n \\ a_{2n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Soient  $r$  et  $s$  deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe  $n$  tel que  $a_n = r$  et  $a_{n+1} = s$ . Indication : récurrence forte sur la valeur de  $r + s$ .

## EXERCICE 8 [Corrigé]

On définit une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par la donnée de  $u_0 > 0$  et par  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2}$  pour tout  $n \geq 0$ .

Calculer  $u_n$  pour tout  $n$  en fonction  $u_0$ , et en déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**EXERCICE 9** [[Corrigé](#)]

On écrit à la suite tous les entiers de 1 jusqu'à 2004.

On les efface de 3 en 3, en commençant par le premier (on efface donc 1, 4, 7, etc.)

On recommence alors la même opération sur la liste restante, et ainsi de suite.

On note  $a_n$  l'entier qui est en tête après  $n$  itérations ( $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, \dots$ )

Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  (indication : discuter suivant la parité de  $a_n$ .)

Combien d'itérations faut-il pour que la liste initiale soit complètement effacée ?