MECANIQUE

ENERGETIQUE

L'expression de l'énergie cinétique ayant été vue lors du cours de cinétique - dynamique, nous n'en redonnons pas ici l'expression. On se contentera ici d'en donner des applications

1 Puissance

Définition : Soient deux ensembles matériels (S_1) et (S_2). Si à l'instant t, (S_1) exerce sur (S_2) une densité de force $d\vec{f}_{1\to 2}(M)$; la puissance développée, à l'instant t, par l'action mécanique de (S_1) sur (S_2), dans le mouvement de (S_2) par rapport à un référentiel d'étude (R) s'écrit et se note :

$$\boxed{P(S_1 \to S_2/R) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M \in S_2/R)} \text{ en } W \text{ (Watt)} = Nms^{-1}$$

D'après le champs des vecteurs vitesse d'un solide, on peut écrire :
$\vec{V}(M \in S_2/R) = \vec{V}(A \in S_2/R) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/R)$. En introduisant cette relation dans la définition ci-dessus, on a alors :

$$P(S_1 \to S_2/R) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(A \in S_2/R) + \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\left[\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/R)\right]$$

$$P(S_1 \to S_2/R) = \vec{V}(A \in S_2/R).\int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M) + \int_{\forall M \in S_2} \vec{\Omega}(S_2/R).\left[d\vec{f}_{1\to 2}(M) \wedge \overrightarrow{MA}\right]$$

$$P(S_1 \to S_2/R) = \vec{V}(A \in S_2/R).\vec{R}(S_1 \to S_2) + \vec{\Omega}(S_2/R).\int_{\forall M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{f}_{1\to 2}(M)$$

$$P(S_1 \to S_2/R) = \vec{V}(A \in S_2/R).\vec{R}(S_1 \to S_2) + \vec{\Omega}(S_2/R).\overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2)$$

avec : $\vec{R}(S_1 \to S_2) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M)$ résultante des actions mécaniques qu'exerce S_1 sur S_2, et

$\overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) = \int_{\forall M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{f}_{1\to 2}(M)$ moment résultant en A des actions mécaniques de S_1 sur S_2

On voit donc apparaître dans l'expression de la puissance les deux torseurs :

cinématique de S_2/R: $\{V(S_2/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R) \\ \vec{V}(A \in S_2/R) \end{Bmatrix}$ et

des actions mécaniques de S_1 sur S_2 : $\{T(S_1/S_2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) \end{Bmatrix}$

On a donc :

$$\boxed{P(S_1 \to S_2/R) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R) \\ \vec{V}(A \in S_2/R) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) \end{Bmatrix} = {}_A\{V(S_2/R)\} \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\}}$$

La puissance développée par les efforts de 1 sur 2 dans le mouvement de 2/R est donc le « produit » des torseurs cinématiques du mouvement de 2 par rapport à R et du torseur des actions mécaniques qu'exerce 1 sur 2. On entend ici par produit de torseur, la somme des deux produits scalaires ***Résultante d'un torseur scalaire Moment de l'autre. Cette puissance peut se calculer à partir des torseurs réduits en un même point qui par contre peut être quelconque.***

La notion de puissance dépend du repère d'étude :
Soient deux repères R_0 et R_3 et deux solides S_1 et S_2:
D'après la composition des vecteurs vitesses, on peut écrire :
$\vec{V}(M \in S_2/R_0) = \vec{V}(M \in S_2/R_3) + \vec{V}(M \in R_3/R_0)$, donc si on calcul la puissance développée par les efforts qu'exerce S_1 sur S_2 dans son mouvement par rapport R_0 $P(S_1 \to S_2/R_0)$, puis par rapport à R_3 $P(S_1 \to S_2/R_3)$:

$$P(S_1 \to S_2/R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M \in S_2/R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\left[\vec{V}(M \in S_2/R_3) + \vec{V}(M \in R_3/R_0)\right]$$

$$P(S_1 \to S_2/R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M \in S_2/R_3) + \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M \in R_3/R_0)$$

$$P(S_1 \to S_2/R_0) = P(S_1 \to S_2/R_3) + \underbrace{{}_A\{V(R_3/R_0)\} \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\}}_{\neq 0}$$

<u>Définition :</u> Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels S_1 et S_2 : On la note $P(S_1 \leftrightarrow S_2)$ et cette quantité vaut :

$$\boxed{P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \to S_2/R_0) + P(S_2 \to S_1/R_0)}$$

<u>Remarque :</u> Cette puissance ne dépend pas du repère R_0 choisi pour la calculer : Soit un second repère d'étude noté R_3 :

$$\begin{aligned}
P(S_1 \leftrightarrow S_2) &= P(S_1 \to S_2/R_0) + P(S_2 \to S_1/R_0) \\
&= {}_A\{V(S_2/R_0)\} \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\} + {}_A\{V(S_1/R_0)\} \otimes {}_A\{T(S_2 \to S_1)\} \\
&= \left[{}_A\{V(S_2/R_3)\} + {}_A\{V(R_3/R_0)\}\right] \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\} + \\
&\quad \left[{}_A\{V(S_1/R_3)\} + {}_A\{V(R_3/R_0)\}\right] \otimes {}_A\{T(S_2 \to S_1)\} \\
&= \underbrace{{}_A\{V(S_2/R_3)\} \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\}}_{P(S_1 \to S_2/R_3)} + \underbrace{{}_A\{V(S_1/R_3)\} \otimes {}_A\{T(S_2 \to S_1)\}}_{P(S_2 \to S_1/R_3)} + \\
&\quad {}_A\{V(R_3/R_0)\} \otimes \underbrace{\left[{}_A\{T(S_2 \to S_1)\} + {}_A\{T(S_1 \to S_2)\}\right]}_{=\left\{\begin{smallmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{smallmatrix}\right\}} \\
&= P(S_1 \to S_2/R_3) + P(S_2 \to S_1/R_3) \\
&= P(S_1 \leftrightarrow S_2)
\end{aligned}$$

<u>Liaisons parfaites entre solides :</u>

Si S_1 et S_2 sont en liaison parfaites, cela signifie que l'on a : $\boxed{P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0}$

On peut alors écrire :

$$P\left(S_1 \leftrightarrow S_2\right)=P\left(S_1 \to S_2/S_2\right)+P\left(S_2 \to S_1/S_2\right)$$

$$0=\underbrace{{}_A\left\{V\left(S_2/S_2\right)\right\}}_{\text{torseur nul}}\otimes{}_A\left\{T\left(S_1 \to S_2\right)\right\}+{}_A\left\{V\left(S_1/S_2\right)\right\}\otimes{}_A\left\{T\left(S_2 \to S_1\right)\right\}$$

$$0={}_A\left\{V\left(S_1/S_2\right)\right\}\otimes{}_A\left\{T\left(S_2 \to S_1\right)\right\}$$

Les deux torseurs (cinématique et des actions mécaniques transmissibles) sont donc complémentaires : les zéros de la résultante de l'un correspondent aux composantes non nulles du moment de l'autre :

$$0=P\left(S_1 \leftrightarrow S_2\right)={}_O\left\{V\left(S_1/S_2\right)\right\}\otimes{}_O\left\{T\left(S_2 \to S_1\right)\right\}={}_O\begin{Bmatrix}\omega_x & v_x\\ \omega_y & v_y\\ \omega_z & v_z\end{Bmatrix}\otimes{}_O\begin{Bmatrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{Bmatrix}$$

$$0=Xv_x+Yv_y+Zv_z+L\omega_x+M\omega_y+N\omega_z$$

Exemple sur la liaison Pivot glissante d'axe $\left(O\vec{x}\right)$ ente les deux solides S_1 et S_2:

$$0=P\left(S_1 \leftrightarrow S_2\right)={}_O\left\{V\left(S_1/S_2\right)\right\}\otimes{}_O\left\{T\left(S_2 \to S_1\right)\right\}={}_O\begin{Bmatrix}\omega_x & 0\\ 0 & v_y\\ 0 & v_z\end{Bmatrix}\otimes{}_O\begin{Bmatrix}0 & L\\ Y & 0\\ Z & 0\end{Bmatrix}$$

2 Travail

Définition : Le travail entre deux instants t_1 et t_2 de l'action mécanique qu'exerce un solide (S_2) sur un solide (S_1) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R vaut :

$$\boxed{W_{t1}^{t2}\left(S_2 \to S_1/R\right)=\int_{t1}^{t2}P\left(S_2 \to S_1/R\right)dt} \text{ en J (Joule)}$$

Cette relation entre travail et puissance peut s'écrire sous forme de dérivation :

$$P\left(S_2 \to S_1/R\right)=\frac{d\left(W\left(S_2 \to S_1/R\right)\right)}{dt}$$

3 Energie potentielle

Définition : Un ensemble matériel (S_1) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique qu'exerce un ensemble matériel (S_2) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R si il existe une fonction scalaire notée $E_P\left(S_2 \to S_1/R\right)$ telle que l'on puisse écrire :

$$\boxed{P\left(S_2 \to S_1/R\right)=-\frac{d\left[E_P\left(S_2 \to S_1/R\right)\right]}{dt}}$$

E_P est alors l'énergie potentielle de S_2 due à l'action de S_1 dans son mouvement par rapport à R.