



## PROBABILITÉS DISCRETES

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-9

Trois enfants  $A, B, C$  jouent à la balle.

Lorsque  $A$  a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à  $B$  est  $\frac{3}{4}$ , la probabilité pour qu'il la lance à  $C$  est  $\frac{1}{4}$ .

Lorsque  $B$  a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à  $A$  est  $\frac{3}{4}$ , la probabilité pour qu'il la lance à  $C$  est  $\frac{1}{4}$ .

$C$  envoie toujours la balle à  $B$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $A_n$  (resp  $B_n, C_n$ ) l'événement «  $A$  (resp  $B, C$ ) a la balle à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  lancer ».

On pose  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$ ,  $c_n = P(C_n)$ .

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs ; c'est par convention le lancer numéro 0. Donc on pose  $a_0 = P(A_0)$ ,  $b_0 = P(B_0)$ ,  $c_0 = P(C_0)$  avec  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ .

1) On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

Montrer, en la déterminant, qu'il existe une matrice  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = D^n X_0.$$

2) Calculer  $X_n$  en fonction de  $n$ .

3) Calculer les limites de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .