PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−20

Partie A

Un jour donné, le nombre N de clients qui examinent un modèle donné de voiture est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p = P(N = 0)$ $(p \in]0;1[)$ et on admet l'hypothèse suivante :

$$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2,\ P_{N\geq r}(N \geq r+s) = P(N \geq s).$$

1) Calculer $P(N \geq 1)$, $P(N \geq 2)$ et $P(N = 1)$.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(N \geq n)$; on montrera que la suite $(P(N \geq n))$ est une suite géométrique.

b) Déterminer la loi de probabilité de N.

3) Déterminer l'espérance et la variance de N.

Partie B

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable de Bernoulli définie par : $X_i = 1$ si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ client décide de passer commande et on pose $P(X_i = 1) = \alpha$, $(\alpha \in]0;1[)$. On suppose que les variables X_i sont indépendantes mutuellement et indépendantes de N.

1) Pour tout $n \in N^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n.

2) On note S la variable aléatoire égale au nombre de voitures commandées.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0;1[$. On admettra que la série de terme général $u_n = \dbinom{n}{k} x^k$, $n \in \mathbb{N}$, converge et on notera $\sigma_k(x)$ sa somme.

a) Montrer que $\forall x \in]0;1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sigma_{k+1}(x) = x(\sigma_k(x) + \sigma_{k+1}(x))$.

b) En déduire que : $\sigma_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

c) Déterminer la loi de S.