

**PROBABILITES DISCRETES****ENONCE DE L'EXERCICE****ENONCE :****ENONCE–20****Partie A**

Un jour donné, le nombre N de clients qui examinent un modèle donné de voiture est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $p = P(N = 0)$ ($p \in]0; 1[$) et on admet l'hypothèse suivante :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2, P_{N \geq r}(N \geq r + s) = P(N \geq s).$$

- 1) Calculer $P(N \geq 1)$, $P(N \geq 2)$ et $P(N = 1)$.
- 2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(N \geq n)$; on montrera que la suite $(P(N \geq n))$ est une suite géométrique.
- b) Déterminer la loi de probabilité de N .
- 3) Déterminer l'espérance et la variance de N .

Partie B

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable de Bernoulli définie par : $X_i = 1$ si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ client décide de passer commande et on pose $P(X_i = 1) = \alpha$, ($\alpha \in]0; 1[$). On suppose que les variables X_i sont indépendantes mutuellement et indépendantes de N .

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de S_n .

- 2) On note S la variable aléatoire égale au nombre de voitures commandées.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0; 1[$. On admettra que la série de terme général $u_n = \binom{n}{k} x^k$, $n \in \mathbb{N}$, converge et on notera $\sigma_k(x)$ sa somme.

- a) Montrer que $\forall x \in]0; 1[, \forall k \in \mathbb{N}, \sigma_{k+1}(x) = x(\sigma_k(x) + \sigma_{k+1}(x))$.
- b) En déduire que : $\sigma_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
- c) Déterminer la loi de S .