PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−19

Une urne contient deux boules blanches et deux noires. On tire simultanément deux boules, on les remplace par deux noires et on recommence les tirages de deux boules dans les mêmes conditions.

1) On note D_n la composition de l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage.

Montrer que, pour $n \geq 1$, D_n ne peut être que de 3 sortes que l'on notera A, B, C.

2) Soit A_n (resp B_n, C_n) l'événement ‹‹ la configuration D_n de l'urne après le $n^{\text{ème}}$ tirage est A (resp B, C) ›› .

On note a_n (resp b_n, c_n) la probabilité de l'événement A_n (resp B_n, C_n). Déterminer a_n, b_n, c_n.

3) Le tirage s'arrête quand pour la première fois l'urne contient quatre noires et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur n si cela se produit à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage.

a) Déterminer la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

b) Calculer l'espérance de X.

INDICATIONS DE SOLUTION

Pour la question 1) : procéder par récurrence

Pour la question 2) : Utiliser le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) et exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n

On trouvera $c_n = \frac{1}{6^n}$; $b_n = 2(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n})$ et $a_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{6^n}$

Pour la question 3) : On montrera que $(X = n) = \overline{A_{n-1}} \cap A_n$