PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−18

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.

On définit la suite de variables X_k de la manière suivante :

X_1 est la variable certaine égale à 1. Pour $p \geq 2$, $X_p = 1$ si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et $X_p = 0$ dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) a) Montrer que :

$$\forall i < j,\ P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}.$$

b) En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

c) Calculer la covariance de (X_i, X_j). Conclusion ?

4) Soit $N \geq 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance $E(Z_N)$.

5) Donner un équivalent simple de $E(Z_N)$ lorsque $n \to +\infty$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 2 : pour étudier la varfiable X_p , considérer que l'on n' effectue que p tirages .