PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–15

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \quad \text{où} \quad p \in]0,1[.$$

On pose $Y_n = X_n \times X_{n+1}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1) Calculer les espérances et les variances de S_n et de V_n.

2) a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et T_1, T_2, Z trois variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant toutes les trois un nombre fini de valeurs.

Montrer que $\operatorname{cov}(aT_1 + bT_2, Z) = a\operatorname{cov}(T_1, Z) + b\operatorname{cov}(T_2, Z)$.

En déduire que $\operatorname{cov}(Z, aT_1 + bT_2) = a\operatorname{cov}(Z, T_1) + b\operatorname{cov}(Z, T_2)$.

b) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $T_1, \ldots, T_n, Z$, $n+1$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs.

Montrer que

$$\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{n} a_i T_i, Z) = \sum_{1\leq i\leq n} a_i \operatorname{cov}(T_i, Z).$$

c) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $T_1, \ldots, T_n, Z_1, \ldots, Z_n$, $2n$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que

$$\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{n} a_i T_i, \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq n}} a_i b_k \operatorname{cov}(T_i, Z_k).$$

3) Calculer $\operatorname{cov}(S_n, V_n)$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 1−b) : On étudiera l'indépendance des variables Y_i pour le calcul de $V(X_n)$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.