



## PROBABILITÉS DISCRETES

## ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

## ENONCE-15

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ où } p \in ]0, 1[.$$

On pose  $Y_n = X_n \times X_{n+1}$  ;  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $V_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ .

1) Calculer les espérances et les variances de  $S_n$  et de  $V_n$ .

2) a) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $T_1, T_2, Z$  trois variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant toutes les trois un nombre fini de valeurs.

Montrer que  $\text{cov}(aT_1 + bT_2, Z) = a \text{cov}(T_1, Z) + b \text{cov}(T_2, Z)$ .

En déduire que  $\text{cov}(Z, aT_1 + bT_2) = a \text{cov}(Z, T_1) + b \text{cov}(Z, T_2)$ .

b) Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $T_1, \dots, T_n, Z$ ,  $n + 1$  variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs.

Montrer que

$$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i T_i, Z\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \text{cov}(T_i, Z).$$

c) Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $T_1, \dots, T_n, Z_1, \dots, Z_n$ ,  $2n$  variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que

$$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i T_i, \sum_{k=1}^n b_k Z_k\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_i b_k \text{cov}(T_i, Z_k).$$

3) Calculer  $\text{cov}(S_n, V_n)$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION

**Question 1–b)** : On étudiera l'indépendance des variables  $Y_i$  pour le calcul de  $V(X_n)$