PHYSIQUE

Plasma d'argon créé par une onde de choc

Les plasmas sont des milieux macroscopiquement neutres, partiellement ou totalement ionisés. Naturels ou artificiels, on les rencontre sous de nombreuses formes : arcs et décharges électriques, foudre, vent solaire, ionosphère, étoiles, lasers à gaz... Dans ce problème on se propose de déterminer par interférométrie la densité électronique n_e d'un plasma d'argon créé par une onde de choc. On étudiera en premier lieu certaines propriétés générales des plasmas, puis les caractéristiques d'une onde de choc, et pour finir, le dispositif expérimental permettant la mesure de la densité électronique. Les différentes parties sont en grande partie indépendantes. On donne le laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $f(r)$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf(r))}{\partial r^2}.$$

Les données numériques nécessaires à la résolution de ce problème sont données ci-dessous :

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\mathrm{F\cdot m^{-1}}$	Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19}$ C	Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$kg
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34}$ J · s	Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Énergie d'ionisation de l'atome d'Argon	$E_{ion} = 15,7$ eV	Masse molaire de l'argon	$M = 39,9\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$	Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Partie I - Quelques généralités sur les plasmas

On considère un plasma d'argon contenant, **en moyenne et par unité de volume**, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de

Filière PSI

masse m_i et n_0 atomes Ar de masse m_0. On définit le degré d'ionisation de ce plasma par le rapport

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0}.$$

On considère d'autre part que le plasma est en équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température thermodynamique T de ce plasma.

I.A - Étude de l'écart local à la neutralité : longueur de Debye

Considérons un ion argon Ar^+ particulier, placé en O, et pris comme origine. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+ situé en O (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement :

$$n_+ = n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \text{ et } n_- = n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right),$$

avec k_B constante de Boltzmann.

I.A.1) Quelle(s) remarque(s) vous suggère(nt) les expressions de n_+ et n_- ? Quel nom donne-t-on usuellement à ces lois de répartition ?

I.A.2)

a) Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M, $\rho_c(r)$ pour $r \neq 0$.

b) Quelle est l'équation locale satisfaite en M par le potentiel $V(r)$?

c) On se place dorénavant dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$. Simplifier l'équation obtenue en I.A.2-b, et la résoudre en introduisant la fonction $u(r) = rV(r)$. On introduira pour cela deux constantes d'intégration A_1 et A_2.

d) On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+, l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Déterminer les constantes A_1 et A_2. Donner ensuite l'expression du potentiel $V(r)$ en fonction de e, ε_0 permittivité diélectrique du vide, r, et d'une distance caractéristique λ_D (appelée longueur de

Debye) que l'on explicitera en fonction de ε_0, k_B, T, n_e et e. Commenter le résultat obtenu.

I.A.3) En déduire la densité volumique totale de charge $\rho_c(r)$ en $r \neq 0$, puis la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e, λ_D et r. Discuter les cas $r \to 0$ et $r \to \infty$. Conclure.

I.A.4) *Application numérique :* on donne pour ce plasma d'Argon $n_e = 3,0 \times 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$. Calculer la valeur numérique de λ_D à la température de $1000\ \mathrm{K}$, puis de $10000\ \mathrm{K}$. Discuter la validité de l'approximation faite en I.A.2-c.

I.B - Comportement collectif d'un plasma : pulsation plasma

Tout gaz ionisé dont la dimension caractéristique est grande devant la longueur de Debye λ_D est dominé par les effets collectifs induits par la charge d'espace, effets qui viennent masquer les comportements individuels étudiés dans le I.A. Pour illustrer le comportement collectif, qui se manifeste notamment lorsqu'on observe ses fluctuations autour de l'équilibre, on s'intéresse à une boule de plasma de centre O et de rayon R, qu'on considérera comme la superposition de deux fluides incompressibles : un fluide d'électrons, susceptible de se mouvoir, et un fluide d'ions qu'on suppose au repos (les densités ioniques et électroniques des deux fluides précédents sont considérées comme uniformes). On admet qu'à l'instant t, le gaz d'électrons s'est déplacé radialement et qu'il occupe la région de l'espace comprise entre deux sphères, une sphère de rayon $r_0(t)$, et une sphère de rayon $R + r_1(t)$, avec $r_1(t)$ très petit devant R (voir figure 1).

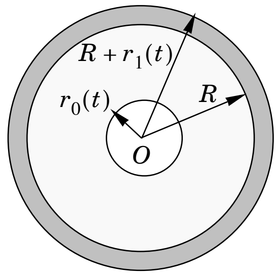


Figure 1

I.B.1) Sachant que le fluide d'électrons est supposé incompressible, quelle est la relation qui relie $r_0(t)$ à $r_1(t)$ et R ?

I.B.2) On considère un électron de ce fluide, situé au point M à la distance r de O, avec $r \in [r_0, R]$. Déterminer, en fonction de e, n_e, r, ε_0 et $r_0(t)$ puis de e, n_e, R, r, ε_0 et $r_1(t)$, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ régnant en M à l'instant t. En déduire la force électrique s'exerçant sur l'électron situé en M.

I.B.3) Un électron, évoluant à la distance moyenne R du point O, possède à l'instant t le vecteur vitesse $\dot{r}_1(t)\ \vec{u}_r$. De même, le vecteur vitesse d'un électron oscillant autour du point M précédent est $\vec{v}(r, t) = v(r, t)\ \vec{u}_r$. En utilisant l'incompressibilité du gaz d'électrons, écrire la relation existant entre la vitesse $v(r, t)$ de l'électron, $\dot{r}_1(t)$, r et R.

I.B.4) Déduire des deux questions précédentes l'équation différentielle satisfaite par $r_1(t)$. Mettre en évidence l'existence d'une pulsation ω_p caractéristique de ce comportement collectif, appelée pulsation plasma, dont on donnera l'expression en fonction de n_e, e, m_e et ε_0.

I.B.5) Quel phénomène vient en pratique amortir les oscillations collectives du plasma ?

I.B.6) Calculer, pour un plasma d'argon de densité électronique $n_e = 3,0 \times 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$ à la température de $10000\ \mathrm{K}$, la valeur de la pulsation plasma ω_p. En réalité, à un éventuel mouvement pulsatoire collectif, radial, se superpose le mouvement désordonné du plasma, dû à l'agitation thermique de ses constituants. L'ordre de grandeur de la section efficace moyenne σ_{eff} lors d'une collision élastique ion-électron est de $5 \times 10^{-17}\ \mathrm{m}^2$. On donne d'autre part l'expression de la valeur moyenne du module de la vitesse d'un électron :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}}.$$

Compte tenu de ces valeurs, le mouvement collectif peut-il être mis en évidence ?

Partie II - Étude d'une onde de choc droite dans le gaz argon

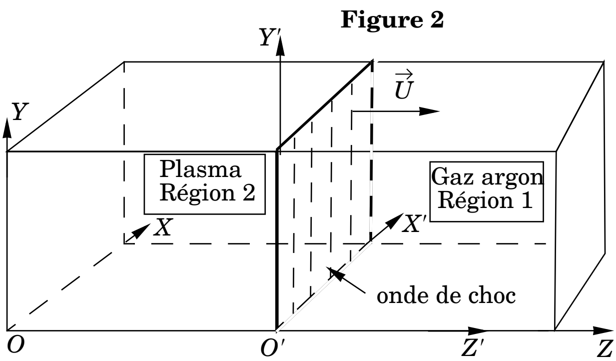
La température d'un gaz peut être fortement élevée par compression adiabatique ; l'ionisation a alors lieu, et un plasma se forme. Une telle compression peut être obtenue par une onde de choc. Une onde de choc droite est une surface plane au travers de laquelle les variables caractérisant l'état fluide subissent une discontinuité, ou un « saut ». Cette onde de choc se propage à une vitesse $\vec{U}$ normale à la surface de discontinuité par rapport au référentiel de l'observateur. Le passage de cette onde de choc dans l'argon gazeux est responsable de l'apparition d'un plasma partiellement ionisé.

Dans le cadre de notre étude, l'argon est contenu dans un tube rectangulaire, de section S suivant les axes OX et OY, de grande longueur suivant l'axe OZ (voir figure 2 ci-après). O est choisi à l'extrémité gauche du tube, et le référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la cuve est supposé galiléen. On note $R'(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel lié à l'onde de choc. Les coordonnées d'un point quelconque M dans R (resp. R') sont (X, Y, Z) (resp. $X' = X$, $Y' = Y$, Z'). À l'instant initial $t = 0$, l'onde de choc est créée dans le plan $Z = 0$; elle se propage ensuite suivant l'axe OZ avec une vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_z$ $(U > 0)$ uniforme et supérieure à celle du son dans le même milieu.

Pour $Z' > 0$, l'argon, qui n'a pas encore été atteint par l'onde de choc et qui est encore immobile dans R, est sous forme gazeuse (région 1). Pour $Z' < 0$ (région

2), l'argon est sous forme d'un plasma partiellement ionisé (Ar, Ar^+, e^-) en mouvement par rapport à R à la vitesse uniforme $\vec{V} = V\vec{e}_z$ avec $V > 0$.

Pour simplifier l'étude, on adopte les hypothèses suivantes :



- les différentes grandeurs intensives caractérisant l'état du système de part et d'autre de l'onde de choc sont uniformes dans les régions considérées ;
- l'écoulement est stationnaire dans le référentiel R' ;
- plasma et gaz d'argon sont en équilibre thermodynamique ;
- l'onde de choc se produit de façon adiabatique non réversible.

On notera $\vec{U_1} = -U_1\vec{e_z}$ (resp. $\vec{U_2} = -U_2\vec{e_z}$) la vitesse dans R' de l'écoulement de la région 1 (resp. 2), T_1 (resp. T_2) la température, p_1 (resp. p_2) la pression, ρ_1 (resp. ρ_2) la masse volumique, h_1 (resp. h_2) l'enthalpie massique de la région 1 (resp. 2). U_1 et U_2 sont des grandeurs positives.

L'argon gazeux sera considéré comme un gaz parfait monoatomique constitué de n_1 molécules par unité de volume (densité particulaire), le plasma, comme un mélange idéal de trois gaz parfaits « monoatomiques » : un gaz d'électrons (de masse m_e) de densité particulaire n_{e2}, un gaz d'ions Ar^+ (de masse m_i) de densité particulaire $n_{i2} = n_{e2}$, et un gaz d'argon (de masse m_0) de densité particulaire n_{02}. On pose d'autre part $n_2 = n_{e2} + n_{02}$ et $\alpha_2 = n_{e2}/(n_{e2} + n_{02})$ (degré d'ionisation du plasma). On suppose d'autre part $m_e \ll m_0$, $m_e \ll m_i$ et $m_0 \approx m_i$.

II.A - Équation fondamentales de l'onde de choc droite

II.A.1) Afin de simplifier l'étude de l'onde de choc, on se place dans le référentiel mobile R'. On rappelle que le gaz d'argon est initialement immobile dans le référentiel R lié à la cuve. Quelle relation simple relie U à U_1 ? Exprimer U_2 en fonction de U et de la vitesse V définie plus haut (on rappelle que $\vec{V}$ est la vitesse du plasma par rapport à R).

II.A.2) Par application dans R' de principes fondamentaux à un système que l'on précisera soigneusement, établir les trois équations bilans suivantes :

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \qquad (1)$$

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 \quad (2)$$

$$2h_1 + U_1^2 = 2h_2 + U_2^2 \quad (3)$$

II.B - Équations thermodynamiques

II.B.1) Donner les relations reliant ρ_1 et n_1 d'une part, ρ_2 et n_2 d'autre part.

II.B.2) Donner, dans le milieu 1, la relation liant p_1, T_1 et n_1. En déduire l'équation (4) :

$$p_1 = \rho_1 r\, T_1 \quad (4)$$

en donnant l'expression littérale puis la valeur numérique du coefficient r ainsi que son unité.

II.B.3) Donner, dans le milieu 2, la relation liant p_2, T_2, n_{e2} et n_{02}. En déduire l'équation (5) :

$$p_2 = \rho_2 r\, T_2(1 + \alpha_2) \quad (5)$$

II.B.4) Sachant que le milieu 1 est un gaz parfait monoatomique, donner l'expression de l'enthalpie massique h_1 en fonction de T_1, de r, et d'un coefficient numérique β dont on donnera la valeur.

II.B.5) Quelle serait l'expression de l'enthalpie massique h_2 obtenue en considérant le plasma comme mélange idéal de gaz parfaits monoatomiques, en fonction de T_2, r, β et α_2 ? En pratique, on est obligé, pour tenir compte des propriétés thermodynamiques complètes des plasmas, de rajouter à l'expression de h_2 obtenue ci-dessus un terme supplémentaire $\alpha_2 h_{ion}$, représentant la contribution du phénomène d'ionisation à l'enthalpie massique de l'écoulement plasmatique. h_{ion} s'obtient à partir de l'énergie d'ionisation par $h_{ion} = E_{ion}/m_0$.
Donner alors l'expression complète de h_2 en fonction de T_2, r, β, h_{ion} et α_2.
Calculer numériquement h_{ion} en $J \cdot kg^{-1}$.

II.B.6) Réécrire alors l'équation (3) en fonction uniquement de α_2, r, T_2, U_2, h_{ion}, T_1, U_1 et β. On obtient ainsi l'équation 3 bis.

II.B.7) L'état du gaz d'argon avant le passage de l'onde de choc est parfaitement connu de l'expérimentateur, et la vitesse de l'onde de choc est parfaitement maîtrisée. Les grandeurs p_1, T_1 (et donc ρ_1), ainsi que U_1 sont donc des grandeurs imposées dans cette expérience. Les inconnues du problème sont donc p_2, ρ_2, T_2, U_2, α_2 et h_2. Combien a-t-il établi d'équations indépendantes permettant de relier ces inconnues ? Que pensez-vous alors de la résolution du problème ?

II.B.8) L'équilibre d'ionisation-recombinaison dans le plasma d'argon en équilibre thermique se traduit par une équation d'équilibre appelée équation de Saha, dont l'expression est la suivante :

$$\frac{n_{e2}^2}{n_{02}} = 2\frac{g_1}{g_0}\left(\frac{2\pi m_e k_B T_2}{h^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{E_{ion}}{k_B T_2}\right)$$

avec h constante de Planck. g_0 et g_1 sont deux constantes sans dimension physique représentant les poids statistiques de l'état électronique fondamental et du premier état excité. On donne $g_0 = 1,005$ et $g_1 = 5,726$. Commenter cette relation en vous aidant d'une analogie empruntée au cours de thermochimie.

Montrer que cette relation est homogène et qu'elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$p_2 = A\frac{1-\alpha_2^2}{\alpha_2^2}T_2^{5/2}\exp\left(-\frac{B}{T_2}\right) \qquad (6)$$

avec A et B des constantes dont on donnera l'expression et l'unité. Le problème présenté est-il à présent soluble ?

II.B.9) Les équations obtenues ici, notamment l'équation de Saha, sont des équations non linéaires, et leur résolution passe par une approche numérique qu'on n'abordera pas ici. On introduit alors le nombre de Mach

$$M_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\gamma r T_1}},$$

avec $\gamma = 5/3$ dans le gaz argon.

Pour $T_1 = 300\ \mathrm{K}$, $p_1 = 93,3\ \mathrm{Pa}$ et $M_1 = 20,0$ on trouve : $\alpha_2 = 0,335$, $T_2 = 1,30 \times 10^4\ \mathrm{K}$ et $\rho_2 = 0,0159\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Que représente physiquement la quantité $\sqrt{\gamma r T_1}$?

Déterminer la vitesse U_2 et la pression p_2 correspondant aux données précédentes.

Déduire de ce qui précède la vitesse V avec laquelle le plasma se déplace dans le repère R (se reporter au résultat de la question II.A.1).

Partie III - Détermination interférométrique de la densité électronique du plasma d'argon

On se propose d'étudier la méthode expérimentale de détermination interférométrique de la densité électronique n_e du plasma d'argon créé par l'onde de choc précédente.

On utilise pour cela le montage de Mach-Zehnder représenté figure 3. Un faisceau laser de pulsation ω et de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,6328\ \mu m$ est divisé en deux faisceaux de même intensité par une lame séparatrice (S). Il transite ensuite selon deux trajets de même longueur jusqu'à un récepteur optique (R) supposé ponctuel. L'un des chemins traverse la largeur L du tube mentionné dans la partie II, parallèlement à OX et au voisinage de $Z = L/2$. L'autre s'effectue dans l'air, d'indice pris égal à celui du vide. On prendra pour les applications numériques $L = 10,0\ \mathrm{cm}$.

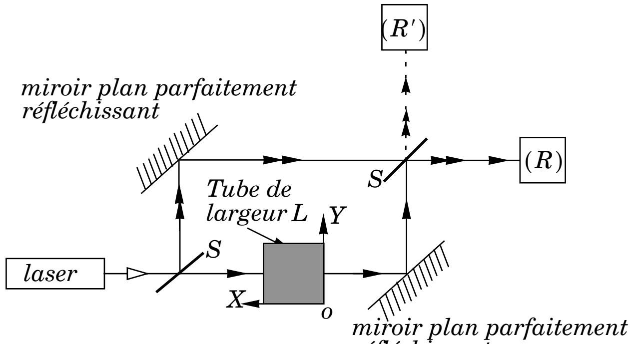


Figure 3

On considérera que le faisceau laser initial peut être représenté par une onde électromagnétique plane monochromatique, d'intensité I_0 et que l'indice du gaz argon de faible densité est celui du vide.

III.A - Détermination de l'indice optique du plasma d'argon

On se place dans le référentiel lié au plasma, supposé galiléen. Dans ce référentiel, on considère le mouvement de l'un de ses électrons libres, en présence d'une onde électromagnétique plane de pulsation ω. On note $\vec{r}(t)$ le vecteur position de cet électron à l'instant t dans le référentiel considéré. On utilisera pour ce plasma les notations de la partie I. On adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le rôle du champ magnétique de l'onde est négligeable ; l'onde agit donc selon son seul champ électrique ;
- l'expression complexe du champ électrique de l'onde agissant sur l'électron peut être écrite sous la forme simplifiée suivante : $\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{i\omega t}$;
- l'électron est soumis de la part du plasma à une force de rappel d'expression

$$\vec{F}_p = -\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0}\vec{r} \ ;$$

- les ions sont supposés immobiles ;
- la force de frottement induite par les collisions est négligeable.

III.A.1) Discuter et justifier chacune des hypothèses adoptées. On pourra se servir des résultats de la partie I.