PHYSIQUE I

L' épreuve est constituée de trois parties indépendantes, ayant en commun l'écoulement d'un fluide en géométrie cylindrique. Dans la partie I, l'écoulement d'air dans un tube cylindrique permet une mesure de la viscosité de l'air. Dans la partie II, on étudie une mesure électromagnétique de la vitesse d'un liquide conducteur dans un tuyau cylindrique isolant. La partie III s'intéresse à l'émission d'ondes acoustiques par un tuyau cylindrique crénelé.

Partie I - Mesure de la viscosité de l'air

Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Un récipient de volume V communique avec l'atmosphère (pression $P_a = 1,016 \cdot 10^5$ pascals et température $T_a = 288$ K) par un tube cylindrique vertical (C) de rayon a et de longueur l muni d'un robinet (R). Un tube en « U » contenant du mercure permet de suivre l'évolution de la pression dans le récipient par lecture de deux hauteurs h' et h''. On note P (majuscule) la pression dans le récipient et p (minuscule) la pression dans le tube (C).

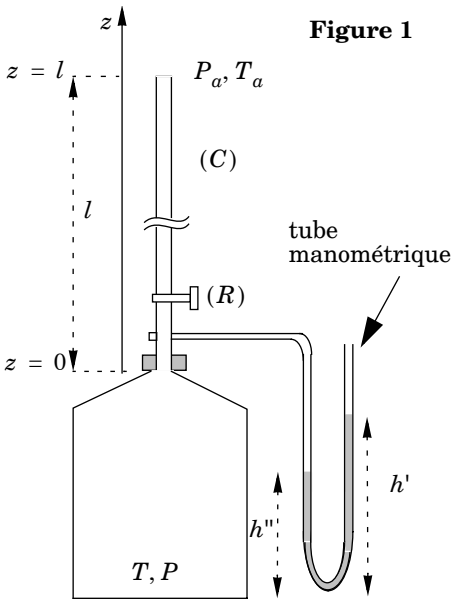

Figure 1

Le robinet (R) étant fermé, on remplit avec une pompe (non représentée sur la figure) le récipient jusqu'à ce que la pression y atteigne la valeur P_1 avec $1,1\ P_a < P_1 < 1,5\ P_a$; le récipient est laissé au repos un moment afin de rétablir l'équilibre thermique avec l'extérieur à la température T_a.

On ouvre alors le robinet (R) pendant une durée t puis on le ferme ; un nouvel équilibre est atteint avec une température uniforme T_a dans tout le dispositif et une pression finale P_2 dans le récipient.

Exemplaire gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Filière PC

I.A - Étude de l'écoulement dans le tube

On s'intéresse à l'écoulement de l'air dans le tube. L'air est supposé vérifier l'équation d'état des gaz parfait et on note $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ sa masse molaire ; on suppose la température uniforme dans le tube, égale à T_a. L'écoulement est décrit par un champ de vitesse $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ avec $v(r)$ indépendant de z et par un champ de pression $p(z)$ indépendant de r. On note n^* la densité moléculaire et ρ la masse volumique. On néglige les effets de la pesanteur sur l'écoulement dans le tube.

I.A.1) On se propose d'obtenir un ordre de grandeur de la viscosité dynamique η de l'air à la température T_a.

a) Par analyse dimensionnelle, exprimer la viscosité cinématique ν de l'air en fonction du libre parcours moyen l^* et de la vitesse quadratique moyenne v^* en adoptant, sans justification, la valeur $1/3$ pour le facteur multiplicatif sans dimension.

b) Soit M la masse molaire de l'air, $R = 8,314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ la constante des gaz parfaits, montrer que :

$$\eta = n^* l^* \sqrt{\frac{MRT_a}{3\mathcal{N}_a^2}} \text{ où } \mathcal{N}_a = 6 \cdot 10^{23} \text{ est le nombre d'Avogadro.}$$

c) On rappelle que dans le modèle des sphères dures, on a $n^* l^* = 1/\pi d^2$ où $d = 0,3\ \mathrm{nm}$ est le diamètre des molécules. En déduire une estimation numérique de η. *Pour la suite du problème, il est par ailleurs important de noter que η ne dépend pas de la pression ; c'est donc une constante dans tout l'écoulement.*

I.A.2) On considère le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans le cylindre élémentaire de rayon r entre les cotes z et $z + dz$ (figure 2). On donne l'expression de la résultante des forces de viscosité subies par ce système :

$$\overrightarrow{dF_v} = \varepsilon\eta \frac{\partial v}{\partial r} 2\pi r\, dz \overrightarrow{u_z}$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

où η est la viscosité dynamique de l'air et où $\varepsilon = \pm 1$. Indiquer s'il convient de prendre $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ en justifiant la réponse qualitativement. Exprimer par ailleurs la résultante des forces de pression sur ce système.

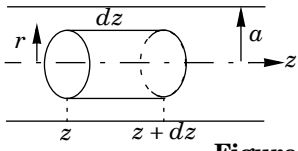

Figure 2

I.A.3) Dans toute la suite, on néglige le terme associé à l'accélération d'une particule de fluide dans l'équation du mouvement. En déduire l'équation locale :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dz}.$$

I.A.4) Exprimer $v(r)$ en fonction de dp/dz, η, a, r.

I.A.5) Montrer que le débit volumique D_v à la cote z vaut $D_v = -\frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{dp}{dz}$.

I.A.6) Pour la suite, on note ρ_a la masse volumique et D_{va} le débit volumique en $z = l$. On fait l'approximation des régimes quasi-stationnaires, de telle sorte que $\rho(z)D_v(z) = \rho_a D_{va}$. Quelle est la signification physique de cette relation ?

I.B - Lien entre η et la pression P dans le récipient

I.B.1) En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, exprimer la relation (valable aussi bien dans le tube que dans le réservoir) entre la masse volumique, la pression (p ou P), la température T_a et la constante $r = R/M$ où M désigne la masse molaire et R la constante des gaz parfaits.

I.B.2) On admet la continuité de la pression à l'entrée du tube soit $P = p(z=0)$. Déduire des questions précédentes la relation :

$$D_{va} = \frac{\pi a^4}{16\eta l}\left(\frac{P^2 - P_a^2}{P_a}\right).$$

I.B.3) Exprimer la variation $d\mathcal{M}/dt$ de la masse d'air $\mathcal{M}$ contenue dans le récipient par unité de temps, en fonction de ρ_a et de D_{va}.

I.B.4) Établir une autre expression de $d\mathcal{M}/dt$ en fonction cette fois du volume V du récipient, de ρ_a, P_a et $\frac{dP}{dt}$, où P désigne toujours la pression dans le récipient.

I.B.5) Soit t la durée entre l'ouverture et la fermeture du robinet. Soient P_1 et P_2 les pressions initiale et finale dans le récipient. En remarquant que :

$$\frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right)$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

montrer que :

$$\eta = \frac{Kt}{\lambda} \text{ avec } K = \frac{\pi a^4 P_a}{8lV} \text{ et } \lambda = \ln\left(\left(\frac{P_1 - P_a}{P_2 - P_a}\right)\left(\frac{P_2 + P_a}{P_1 + P_a}\right)\right).$$

I.C - L'expérience

I.C.1) Comment mesureriez-vous le volume V du récipient dans votre salle de travaux pratiques ?

I.C.2) On donne $V = 9646\ \text{cm}^3$, $l = 64,82\ \text{cm}$ et $a^4 = 1,767 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^4$. Le tube manométrique contient du mercure de masse volumique $\rho_m = 13,56 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $g = 9,81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. On pourra utiliser le fait que la pression atmosphérique P_a correspond à $H_a = 76,36\ \text{cm}$ de mercure.

Dans l'état initial (pression P_1) on mesure $h'_1 = 36,26\ \text{cm}$ et $h''_1 = 13,80\ \text{cm}$. Dans l'état final (pression P_2) on obtient $h'_2 = 30,20\ \text{cm}$ et $h''_2 = 19,93\ \text{cm}$. La durée de la fuite est $t = 120\ \text{s}$. Calculer λ, K puis η.

I.C.3) On se propose de se faire une idée du nombre de chiffres significatifs qui peuvent être retenus dans la mesure de η compte tenu des incertitudes sur les différentes mesures $(h', h'', a \ldots)$ en limitant l'étude à l'influence du seul paramètre h''. Reprendre le calcul de η avec la valeur $h''_2 = 19,96\ \text{cm}$, les autres valeurs étant inchangées. En déduire un affichage cohérent de la mesure de η.

Partie II - Mesure de la vitesse d'un liquide conducteur

On considère l'écoulement d'un liquide légèrement conducteur (par exemple du sang) dans un tuyau cylindrique isolant de rayon a (cf. figure 3). On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_x}$. On se place en régime stationnaire. Dans un premier temps on se place en coordonnées cartésiennes et on suppose que le champ des vitesses de l'écoulement réel est donné par : $\vec{v} = k(a^2 - x^2 - y^2)\vec{e_z}$ où k est une constante donnée.

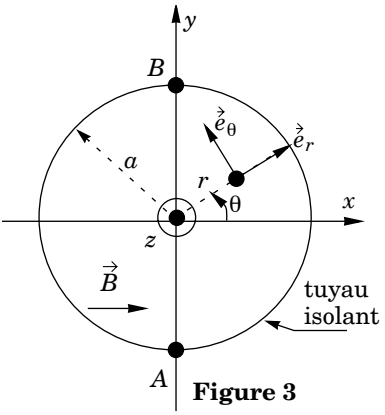

Figure 3

II.A - Expression de $\vec{j}$

II.A.1) On définit la vitesse moyenne v_m du liquide comme la vitesse d'un écoulement uniforme fictif qui donnerait le même débit volumique à travers une section du tube que l'écoulement réel. Exprimer v_m en fonction de k et a.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

II.A.2) On rappelle la loi d'Ohm locale donnant le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en fonction du potentiel électrique V, de la conductivité γ du liquide, de la vitesse $\vec{v}$ du liquide et du champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{j} = \gamma(-\overrightarrow{grad}V + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Quel phénomène physique décrit le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$?

II.A.3) Montrer que : $\overrightarrow{rot}\vec{j} = -2\gamma B_0 k x \vec{e}_z$.

II.A.4) Rappeler sans démonstration l'équation locale de conservation de la charge. En déduire qu'on peut chercher la densité de courants sous la forme $\vec{j} = \overrightarrow{rot}\vec{\psi}$.

II.A.5) On rappelle que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\ \vec{a}) = \overrightarrow{grad}(div\ \vec{a}) - \vec{\Delta}\ \vec{a}$. Dans la suite on cherche $\vec{\psi}$ de la forme $\vec{\psi} = \psi(M)\vec{e}_z$ où $\psi(M)$ ne dépend pas de la cote z du point M. En déduire que :

$$\Delta\psi = 2\gamma B_0 k x . \qquad (1)$$

II.A.6) Dans toute la suite, on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz on en utilise le trièdre local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé. On admet que la solution de l'équation (1) est de la forme :

$$\psi = \left(Cr + \frac{\gamma B_0 k r^3}{4}\right)\cos\theta$$

où C est une constante. On rappelle que $\overrightarrow{rot}(\psi \vec{e}_z) = \overrightarrow{grad}\psi \wedge \vec{e}_z$. Exprimer les composantes j_r et j_θ de $\vec{j}$ en fonction de C, B_0, k, r et θ.

II.A.7) Quelle est la condition aux limites sur $\vec{j}$ à la surface du tuyau isolant ? En déduire la valeur de la constante C en fonction de k, γ, B_0 et a puis les expressions de j_r et j_θ en fonction de B_0, k, r, a et θ.

II.A.8) En utilisant les expressions de j_r et j_θ, déterminer l'équation différentielle des lignes de courants. Vérifier que ce sont des courbes $\psi(r, \theta) = \text{constante}$. Tracer l'allure de quelques lignes de courants.

II.B - Expression du potentiel

II.B.1) Montrer que

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{kB_0}{4}(3(a^2 - r^2)\sin\theta\,\vec{e}_r + (3a^2 - r^2)\cos\theta\,\vec{e}_\theta) .$$

II.B.2) On place un voltmètre entre les points $A(x = 0, y = -a)$ et $B(x = 0, y = a)$. Exprimer $V_A - V_B$ en fonction de k, B_0 et a.

II.B.3) En déduire l'expression de $V_A - V_B$ en fonction de B_0, a et de v_m définie en II.A.1. Calculer v_m pour $a = 5\ \text{mm}$ et $B_0 = 0,95\ \text{T}$ sachant que $V_A - V_B = -2,0\ \text{mV}$.

II.B.4) Citer (sans aucun détail) une autre méthode de mesure de la vitesse d'un fluide.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

II.C - Champ magnétique induit

Dans ce qui précède on a supposé que le champ magnétique $\vec{B}$ effectivement perçu au sein du fluide est le champ $B_0\vec{e}_x$ créé par les sources extérieures de courant, supposées constantes, ce qui n'est qu'une approximation car les courants $\vec{j}$ induits calculés dans la partie II.A créent un champ qu'on notera $\vec{B}^*$.

II.C.1) Le tube étant supposé infiniment long selon $\vec{e}_z$, justifier que le champ magnétique induit est de la forme $\vec{B}^* = B^*(r,\theta)\vec{e}_z$ avec $B^*(r,\theta)$ indépendant de z.

II.C.2) Quelles sont les deux équations locales dont est solution le champ $\vec{B}^*$? Vérifier que $\vec{B}^* = \mu_0\psi\vec{e}_z$ est solution de ces équations pour $r \le a$. On admettra qu'il s'agit bien de la solution.

II.C.3) En exploitant l'expression de k en fonction de a et v_m établie en II.A.1, en déduire un critère pour que $B^* \ll B_0$. Vérifier l'homogénéité de ce critère (on pourra par exemple faire référence à l'expression de l'épaisseur de peau). Dans le cas du sang ($\gamma = 10\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) ce critère est-il vérifié pour les valeurs numériques de la question II.B.3 ?

Partie III - Ondes acoustiques dans un tuyau crénelé

On considère le tuyau crénelé souple représenté en coupe sur la figure 4 et caractérisé par la période des créneaux d et les sections S_1 et S_2. Lorsqu'on place le tuyau crénelé face à un écoulement d'air de vitesse v_0 il « chante » : on entend un son sinusoïdal dont la fréquence dépend de v_0 et de d.

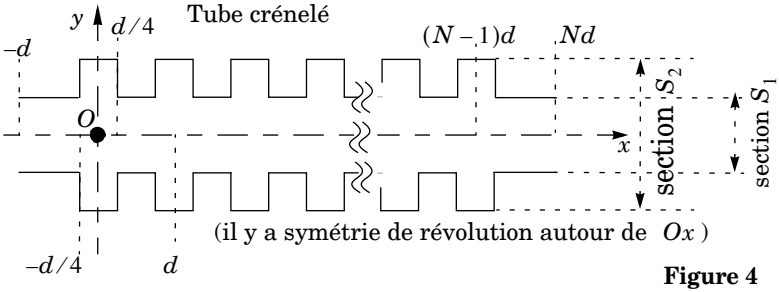

Figure 4

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

III.A - Un autre moyen d'engendrer l'écoulement d'air

Pour engendrer l'écoulement dans le tuyau crénelé, la notice d'un jouet fonctionnant sur ce principe incite non pas à souffler dans le tube mais à le faire tournoyer autour de sa tête. On modélise ceci en supposant le tube coudé et mis en rotation à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe Oz dans une configuration telle que celle représentée sur la figure 5. La partie verticale du tuyau est caractérisée par une hauteur h négligeable devant la longueur l de la partie horizontale. On se propose d'interpréter cette observation.

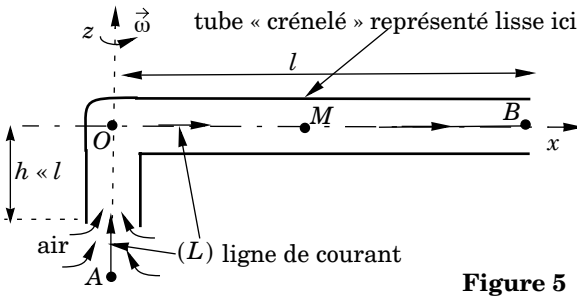

Figure 5

On étudie l'écoulement dans le référentiel tournant $(R) = (Oxyz)$ dont Ox est l'axe horizontal du tuyau et dont Oz est la verticale ascendante et la direction du vecteur-rotation. $(R_0) = (Ox_0y_0z)$ est le référentiel galiléen du laboratoire. L'écoulement est supposé stationnaire dans (R), incompressible et homogène de masse volumique ρ_0. On note $v_0(M)$ le module du champ des vitesses dans (R) et $p(M)$ la pression en M dans le tuyau. On néglige l'influence de la pesanteur et on suppose pour simplifier le tuyau lisse, de section S constante.

III.A.1) Expliciter les forces d'inertie volumiques subies par une particule de fluide située à la distance x de l'axe, en fonction de ρ_0, ω, $v_0(x)$ et x.

III.A.2) On néglige les forces volumiques de viscosité et de pesanteur. Montrer que :

$$p(M) + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2(M) - \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 x^2$$

est une constante sur la ligne de courant dont on suppose l'existence, notée (L) sur la figure, et confondue avec l'axe du tuyau dans sa partie horizontale ou verticale.

III.A.3) Soit A un point sur la ligne de courant (L) situé sur l'axe Oz à l'extérieur du tuyau, tel que $p(A) = p_0$ et $v_0(A) \approx 0$. Soit B le point situé à l'extrémité $x = l$ du tuyau. On admet que $p(B) = p_0$ et on note $v_0(x = l) = v_0(B) = v_0$. Exprimer la vitesse v_0 en fonction de ω et l.

III.A.4) Déterminer $v_0(x)$ et $p(x)$ en un point quelconque de la partie horizontale du tuyau en fonction de p_0, ω, x et l. Tracer l'allure du graphe de $p(x)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Dans toute la suite, on suppose pour simplifier que le tuyau est rectiligne et fixe dans le référentiel galiléen $(R) = (Oxyz)$ dont Ox est l'axe du tuyau, le courant d'air de vitesse $v_0 \vec{e}_x$ étant imposé en soufflant dans le tuyau (et non plus en le coudant et en le faisant tourner).

III.B - Approche qualitative de l'émission d'un son par le tuyau crénelé

III.B.1) On admet que la surpression s'annule aux extrémités $x = 0$ et $x = l$ du tuyau. Donner les expressions des fréquences propres f_n d'un tuyau lisse en fonction de l, de la célérité du son c et d'un entier n. Sans chercher à expliciter la surpression, rappeler l'allure de son graphe en fonction de x pour les deux premiers modes propres $n = 1$ et $n = 2$. Dans la suite de la partie III.B, on suppose que les fréquences émises par un tuyau crénelé sont les mêmes que celles d'un tuyau lisse. Cette approximation sera confrontée à l'expérience dans la question III.B.4 et on s'en affranchira dans la partie III.C.

III.B.2) Pour un tuyau crénelé donné, plus la vitesse moyenne v_0 de l'air est élevée, plus le son entendu est de fréquence élevée. Pour interpréter ce fait, on suppose qu'une harmonique de fréquence f se fait entendre si la fréquence avec laquelle une particule d'air en mouvement dans le tuyau crénelé rencontre les créneaux correspond à f. En déduire une relation entre f, d et v_0.

III.B.3) Cependant, on observe que certaines fréquences basses ne se font pas entendre. Pour interpréter ce fait on suppose qu'une condition nécessaire d'émission du son est que l'écoulement soit turbulent.

a) Interpréter sommairement cette hypothèse en indiquant comment se manifeste concrètement le caractère turbulent de l'écoulement.

b) On note $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2\ s^{-1}}$ la viscosité cinématique de l'air. Exprimer en fonction de f, ν et d le nombre de Reynolds Re de l'écoulement et justifier l'existence d'une fréquence minimale f_m.

III.B.4) La fréquence minimale émise par un tuyau tel que $d = 7\ \mathrm{mm}$ et $l = 1,82\ \mathrm{m}$ vaut $f_m = 270\ \mathrm{Hz}$.

a) Calculer Re et conclure.

b) Quel est l'ordre de grandeur de la célérité du son dans l'air à température ambiante ? En déduire le numéro probable n de l'harmonique du tuyau correspondant à f_m.

c) Justifier l'approximation « forces de viscosité négligeables » de la question III.A.2 en évaluant en ordre de grandeur le rapport du terme négligé sur le terme associé à l'accélération dans l'équation du mouvement. Ces forces de viscosité continueront à être négligées dans la suite.

Exemplaire gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

III.C - Approche quantitative de l'émission d'un son par le tuyau crénelé

Le tuyau crénelé est désormais modélisé comme une mise en série de N cellules identiques représentées par la figure 4. Le tuyau est compris entre $x = -d$ et $x = Nd$ et la dernière cellule est centrée en $x = (N-1)d$.

III.C.1) On décrit dans cette question la propagation de l'onde acoustique dans une partie du tuyau de section S constante par le champ des vitesses $\vec{v}(x,t) = (v_0 + v_1(x,t))\vec{e}_x$, par le champ de pression $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$, par le champ de masse volumique $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ et par le débit volumique $Q(x,t) = Q_0 + Q_1(x,t)$; v_0 est la vitesse du courant d'air imposé et Q_0 le débit volumique associé. On limite les calculs à l'ordre un pour les termes portant l'indice 1.

a) Écrire l'équation d'Euler en projection selon $\vec{e}_x$. À quelle condition sur v_0 et c (célérité du son) peut-on négliger le terme d'accélération convective devant le terme d'accélération locale, ce qu'on fait dans la suite ?

b) Dans la suite on étudie un régime sinusoïdal et on pose en notation complexe :

$$\underline{v}_1(x,t) = \underline{v}_1(x)\exp(-i\omega t) \ ; \ \underline{p}_1(x,t) = \underline{p}_1(x)\exp(-i\omega t) \text{ et } \underline{Q}_1(x,t) = \underline{Q}_1(x)\exp(-i\omega t).$$

Exprimer $\underline{Q}_1(x)$ en fonction de la section S du tuyau, de ρ_0, ω et de $d\underline{p}_1/dx$.

III.C.2) On étudie la cellule numéro [0] : pour $|x| < d/4$ le tuyau a pour section S_2 et pour $x > d/4$ ou $x < -d/4$ la section est S_1 avec

$$S_1/S_2 = \sigma < 1 \ ; \text{ on pose } \varepsilon_\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \frac{1}{\sigma}\right).$$

Un onde incidente plane progressive monochromatique arrive de $x < -d/4$. On cherche alors les surpressions dans la cellule [0] sous la forme suivante : ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, $\underline{F}$ complexes)

$$x < -d/4 \qquad \underline{p}_1(x,t) = \underline{A}\exp(ikx - i\omega t) + \underline{B}\exp(-ikx - i\omega t),$$

$$-d/(4 < d/4) \qquad \underline{p}_2(x,t) = \underline{C}\exp(ikx - i\omega t) + \underline{D}\exp(-ikx - i\omega t)$$

$$x > d/4 \qquad \underline{p}_3(x,t) = \underline{E}\exp(ikx - i\omega t) + \underline{F}\exp(-ikx - i\omega t) \text{ où } k = \omega/c.$$

a) Justifier rapidement la légitimité du choix de ces expressions et exprimer $\underline{Q}_1(x)$ dans les trois domaines en fonction de S_1, S_2, ρ_0, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, $\underline{F}$, k, ω et x.

b) On admet la continuité du débit volumique et de la pression en $x = -d/4$ et $x = d/4$. En déduire quatre équations reliant $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, $\underline{F}$, k, d, S_1 et

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.