PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−11

Un dé possède six faces numérotées 1 à 6. La probabilité d'apparition du 5 à chaque lancer est $p \in]0;1[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on lance le dé k fois et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le numéro 5 est apparu.

1) Pour quelles valeurs de k la probabilité $P(\frac{X}{k} = \frac{1}{6})$ est-elle non nulle ?

2) Etudier les variations de la fonction $x \in]0;1[\longmapsto (\frac{6}{5})^5 x(1-x)^5$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k = 6n$; calculer $a_n = P(X = n)$.

4) On suppose $p \neq \frac{1}{6}$.

a) Montrer que : $a_n \leq P(|X - 6np| \geq n|1 - 6p|)$.

b En déduire un majorant de na_n, majorant bien-sûr indépendant de n (on pourra penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff).

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5) a) Déduire de la question précédente que :

$$\exists\, L \in]0;1[,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ /\ \forall n \geq n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L.$$

b) Montrer alors que

$$\exists\, A > 0,\ \ /\ \forall n \geq n_0,\ a_n \leq A.L^n.$$

c) Montrer que la série de terme général a_n converge.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

- Pour la question 4, Ecrire $(X = n) = (X - 6np = n(1 - 6p)$, puis comparer les événements $(X - 6np = n(1 - 6p)$ et $(|X - 6np| = |n(1 - 6p)|$
- Pour la question 5, utiliser la définition de la limite (avec les quantificateurs)