PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–11

Un dé possède six faces numérotées 1 à 6. La probabilité d'apparition du 5 à chaque lancer est $p \in]0;1[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on lance le dé k fois et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le numéro 5 est apparu.

1) Pour quelles valeurs de k la probabilité $P(\frac{X}{k} = \frac{1}{6})$ est-elle non nulle ?

2) Etudier les variations de la fonction $x \in]0;1[\longmapsto (\frac{6}{5})^5 x(1-x)^5$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k = 6n$; calculer $a_n = P(X = n)$.

4) On suppose $p \neq \frac{1}{6}$.

a) Montrer que : $a_n \leq P(|X - 6np| \geq n|1 - 6p|)$.

b En déduire un majorant de na_n, majorant bien-sûr indépendant de n (on pourra penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff).

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5) a) Déduire de la question précédente que :

$$\exists\, L \in]0;1[,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ / \ \forall n \geq n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L.$$

b) Montrer alors que

$$\exists\, A > 0,\ \ / \ \forall n \geq n_0,\ a_n \leq A.L^n.$$

c) Montrer que la série de terme général a_n converge.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

- Pour la question 4, Ecrire $(X = n) = (X - 6np = n(1 - 6p)$, puis comparer les événements $(X - 6np = n(1 - 6p)$ et $(|X - 6np| = |n(1 - 6p)|$
- Pour la question 5, utiliser la définition de la limite (avec les quantificateurs)

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.