PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−10

1) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

2)Soit $p_1,\dots,p_n$ des réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$2(p_1+\cdots+p_n)\leq \frac{p_1+2p_2+\cdots+np_n}{n+1}+(n+1)(p_1+\frac{1}{2}p_2+\cdots+\frac{1}{n}p_n).$$

(On pourra considérer la différence).

3) Notons $S_n=\sum_{k=1}^{n}p_k,\ A_n=\sum_{k=1}^{n}kp_k,\ B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}p_k$ et $D_n=A_n\times B_n-S_n^2$.

a) Etablir que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ D_{n+1}=D_n+p_{n+1}\Big(\frac{A_n}{n+1}+(n+1)B_n-2S_n\Big).$$

b) En utilisant la question **2)**, montrer par récurrence que, si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, on a l'inégalité :

$$\forall n\geq 1,\ \Big(\sum_{k=1}^{n}p_k\Big)^2\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}kp_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}p_k\Big).$$

4) Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que Z admet une espérance $E(Z)$.

Montrer que la variable $\frac{1}{Z}$ admet aussi une espérance et que l'on a :

$$E\big(\frac{1}{Z}\big)\geq\frac{1}{E(Z)}.$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE