



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-10

1) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2) Soit p_1, \dots, p_n des réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$2(p_1 + \dots + p_n) \leq \frac{p_1 + 2p_2 + \dots + np_n}{n+1} + (n+1)(p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \dots + \frac{1}{n}p_n).$$

(On pourra considérer la différence).

3) Notons $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$, $A_n = \sum_{k=1}^n kp_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}p_k$ et $D_n = A_n \times B_n - S_n^2$.

a) Etablir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D_{n+1} = D_n + p_{n+1} \left(\frac{A_n}{n+1} + (n+1)B_n - 2S_n \right).$$

b) En utilisant la question 2), montrer par récurrence que, si $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs, on a l'inégalité :

$$\forall n \geq 1, \left(\sum_{k=1}^n p_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n kp_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}p_k \right).$$

4) Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* . On suppose que Z admet une espérance $E(Z)$.

Montrer que la variable $\frac{1}{Z}$ admet aussi une espérance et que l'on a :

$$E\left(\frac{1}{Z}\right) \geq \frac{1}{E(Z)}.$$