IV Exemples.

IV.1 Contours apparents coniques.

Définition

Soit $\sum$ une surface de $\mathbb{R}^3$ et Ω un point fixe de $\mathbb{R}^3$, on appelle contour apparent conique de la surface $\sum$ vue du point Ω, l'ensemble Γ des points M de $\sum$ tels que le plan tangent en M à $\sum$ passe par Ω.

Définition

Le cône de sommet Ω et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface $\sum$.

Exemple.

Soit l'hyberboloide $\sum$ d'équation : $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ et $\Omega\,(1,1,-1)$.

L'équation du plan tangent $_{M_0}$ en $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ régulier est $xx_0 - 2yy_0 + 2zz_0 = 1$, $\Omega \in_{M_0}$ si $x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1$.

Les coordonnées des points M_0 vérifient le système suivant $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1. \\ x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases}$

L'intersection du quadrique et d'un plan est en général une conique.

On choisit $\overrightarrow{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on choisit $\overrightarrow{I}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I}$, d'où $\overrightarrow{J}\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

On note (X_0,Y_0,Z_0) les coordonnées de M_0 dans le repère $\mathcal{R} = \left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$.

$x_0 - 2y_0 + 2z_0 = \sqrt{5}\overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{K} = Z_0\sqrt{5}$ donc $Z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ on sait que } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix},$$

On remplace Z_0 par $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, en déduit que :

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{4}{\sqrt{10}}Y_0 + \dfrac{1}{5} \\ y_0 = \dfrac{X_0}{\sqrt{2}} - \dfrac{Y_0}{\sqrt{10}} - \dfrac{2}{5} \\ z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X_0 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}Y_0 + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{4}{\sqrt{10}}b + \dfrac{1}{5} \\ y_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} - \dfrac{c}{\sqrt{10}} - \dfrac{2}{5} \\ z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}a + \dfrac{1}{\sqrt{10}}b + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = \dfrac{8}{5}Y_0^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{1}{25} + \dfrac{2}{5}\sqrt{2}X_0\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}X_0$

On obtient la conique d'équation ; $\dfrac{8}{5}Y_0^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{1}{25} + \dfrac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}X_0 = 1$

or $\dfrac{8}{5}Y_0^2 + \dfrac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} = \dfrac{4}{5}\left(2Y_0^2 + Y_0\sqrt{5}\right) = \dfrac{4}{5}\left(X_0,Y_0\right)\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$

On pose $U = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

U admet la valeur propre $\frac{5}{2}$ associée au vecteur $\overrightarrow{I_1}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre $-\frac{1}{2}$ associée au vecteur propre $\overrightarrow{J_1}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

La matrice U est inversible donc la conique est à centre O' dont les coordonnées (a,b) sont solutions de $\overrightarrow{gradP\left(a,b\right)} = \overrightarrow{0}$, soit

$\begin{cases} \dfrac{4}{5}b\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2} = 0 \\ \dfrac{16}{5}b - \dfrac{4}{25}\sqrt{10} + \dfrac{4}{5}a\sqrt{5} = 0 \end{cases}$, les solutions sont $a = \dfrac{9\sqrt{2}}{5}$ et $b = -\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

Le centre de la conique est donc le point $O'\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}, -\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)$.

$P\left(a,b\right) = \dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right) + \dfrac{1}{25} + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\right)\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\right) - 1 = \dfrac{56}{25}$

Dans le repère $\left(O',\overrightarrow{I_1},\overrightarrow{J_1}\right)$ la conique a pour équation réduite $\dfrac{5}{2}X_1^2 - \dfrac{1}{2}Y_1^2 = \dfrac{56}{25}$, c'est donc une hyperbole dont on peut déterminer les éléments caractéristiques.

IV.2 Contours apparents cylindriques.

Définition

Soit $\sum$ une surface de $\mathbb{R}^3$ et D une direction de $\mathbb{R}^3$, on appelle contour apparent cylindrique de la surface $\sum$ de direction D, l'ensemble Γ des points M de $\sum$ tels qu'il existe une droite passant par M et de direction D contenue dans le plan tangent en M à $\sum$.

Définition

Le cylindre de direction et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface $\sum$.

Exemple.

Déterminer l'équation du cylindre $\mathcal{C}$ de direction $Vect\left(\overrightarrow{u}\right)$ où $\overrightarrow{u}\,(1,-2,1)$ et circonscrit à la surface $\sum : x^2+2y^2-z=0$.

On écrit que si $M\,(x,y,z)\in\mathcal{C}$ si la droite $(M,\overrightarrow{u})$ est orthogonal à $\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}$ où $P\,(x,y,z)=x^2+2y^2-z$.

$\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}\,(2x,4y,-1)$, donc $\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}.\overrightarrow{u}=0$, ce qui donne : $2x-8y-1=0$.

Le contour apparent de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est la conique $\Gamma\left\{\begin{array}{c}2x-8y-1=0\\ x^2+2y^2-z=0.\end{array}\right.$

Pour trouver le cylindre circonscrit on peut chercher l'équation du cylindre et d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec les méthodes habituelles.

La surface $\sum$ est une quadrique,donc toute droite coupe $\sum$ en au plus deux points, la droite $(M,\overrightarrow{u})$ étant incluse dans le plan tangent en M à $\sum$, on peut montrer que cette droite coupe $\sum$ en un point unique.

$N\,(X,Y,Z)\in(M,\overrightarrow{u})$ si $\exists\, t\in\mathbb{R}$ tel que : $\left\{\begin{array}{c}X=x+t\\ Y=y-2t\\ Z=z+t\end{array}\right.$

Les coordonnées de $\sum\cap(M,\overrightarrow{u})$ vérifient le système $\left\{\begin{array}{c}X=x+t\\ Y=y-2t\\ Z=z+t\\ (x+t)^2+2\,(y-2t)^2-(z+t)=0\end{array}\right.$

t est solution de ; $9t^2+t\,(2x-8y-1)+2y^2+x^2-z=0$.

$\Delta=(2x-8y-1)^2-36\,(2y^2+x^2-z)$, or t doit être racine double, donc l'équation du cylindre circonscrit $\mathcal{E}$ cherché est :

$$(1)\qquad (2x-8y-1)^2-36\left(2y^2+x^2-z\right)=0$$

Vérifions que $\mathcal{E}$ est bien un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

(1) donne : $-32x^2-32xy-4x-8y^2+16y+1+36z+0$

La matrice $M=\begin{pmatrix}-32&-16&0\\-16&-8&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, vecteurs propres: $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow-40,\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow$ 0, les valeurs propres sont : $0,0,-40$