

III Quadriques.

III.1 Définition.

Définition1.

Définition Quadrique

Soit P l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} de la forme ;

$$P(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fxy + 2gx + 2hy + 2kz + l$$

On appelle quadrique, la surface de \mathbb{R}^3 dont une équation cartésienne est de la forme $P(x,y,z) = 0$.

Remarque.

On pose $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fxy$, Q est un polynôme homogène du second degré, c'est à dire que Q est une fonction polynomiale du second degré en x,y et z , de plus il est homogène de degré 2 car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, Q(tx,ty,tz) = t^2Q(x,y,z)$$

On pose $F(x,y,z) = 2gx + 2hy + 2kz$, F est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , la matrice L de F dans la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est $L = \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix}$

si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $F(x,y,z) = {}^tLX$

On note $M = \begin{pmatrix} a & f & e \\ d & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, on a ${}^tXMX = Q(x,y,z)$.

Donc la quadrique a pour équation

$${}^tXMX + 2{}^tLX + l = 0$$

III.2 Plan tangent.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}P}(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$

donc

$$\overrightarrow{\text{grad}P}(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} 2ax_0 + 2fy_0 + 2ez_0 + 2g \\ 2fx_0 + 2by_0 + 2dz_0 + 2h \\ 2ex_0 + 2dy_0 + 2cz_0 + 2k \end{pmatrix}$$

On note toujours $M = \begin{pmatrix} a & f & e \\ d & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}P}(x_0, y_0, z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0 + 2L$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

M_0 est régulier si $MX_0 + L \neq 0$.

Le plan tangent en un point régulier est :

$$(x - x_0) \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Sous forme matricielle, ${}^t(2MX_0 + 2L)(X - X_0) = 0$, c'est à dire $2{}^tX_0MX - 2{}^tX_0MX_0 + 2LX - 2LX_0 = 0$

Or ${}^tX_0MX_0 + 2LX_0 + l = 0$, on en déduit que le plan tangent a pour équation en un point régulier,

$${}^tX_0MX + {}^tL(X + X_0) + l = 0$$

D'où la "règle" de dédoublement des termes, on remplace les carrés comme x^2 par xx_0 , $xz + zx$ est remplacé par $xz_0 + x_0z$ et la somme $x + x$ par $x + x_0$.

Exemple : $\sum : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + 4xz + 4x + 8y + 10z = 0$

Le plan tangent en M_0 régulier a pour équation ;

$$\frac{xx_0}{4} + \frac{yy_0}{9} + \frac{zz_0}{16} + 2(xz_0 + x_0z) + 2(x + x_0) + 4(y + y_0) + 5(z + z_0) = 0.$$

III.3 Élimination des termes rectangles. (changement de base)

Parmi les termes du second degré, on cherche à conserver uniquement les carrés, pour pouvoir caractériser les quadriques par leurs équations réduites.

La méthode consiste à changer de repère orthonormé, une méthode parmi d'autres (toujours regarder avant, si l'évidence n'est pas devant nous) consiste à diagonaliser la matrice symétrique réelle M .

On sait qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ telles que $U^{-1}MU = D$ soit

$M = UDU^{-1}$ ou encore $M = UD^tU$.

On a ${}^tXMX = {}^tXUD^tUX = {}^t({}^tUX)D({}^tUX)$, on pose $Y = {}^tUX = U^{-1}X$.

On sait que si $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice M , la matrice Y des coordonnées d'un vecteur dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est égale à $U^{-1}X$ où X est la matrice des coordonnées de ce vecteur dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et U est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Les nouveaux axes du repère $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sont appelés axes principaux de la quadrique.

On note $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$Q(x, y, z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

L'équation de la quadrique dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est ${}^tYDY + {}^tLUY + l = 0$

Soit ${}^tYDY + {}^tL'Y + l = 0$ avec $L' = {}^tUL$.

III.4 Quadriques à centre. (changement d'origine)

On change l'origine du repère, on note $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, X la matrice des coordonnées dans \mathcal{R} , X' la matrice des coordonnées dans \mathcal{R}' , $X_{O'}$ la matrice des coordonnées dans \mathcal{R} de O' dans le repère \mathcal{R} .

On a $X' = X - X_{O'}$ ou encore $X = X' + X_{O'}$.

On remplace dans l'équation de la quadrique; ${}^t(X' + X_{O'})M(X' + X_{O'}) + 2{}^tL(X' + X_{O'}) + l = 0$.

On développe et on obtient :

$${}^tX'MX' + 2({}^tX_{O'}M + {}^tL)X' + ({}^tX_{O'}MX_{O'} + 2{}^tLX_{O'} + l) = 0$$

On remarque que $P(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}) = ({}^tX_{O'}MX_{O'} + 2{}^tLX_{O'} + l)$.

On pose $L' = MX_{O'} + L$ on a :

$${}^tX'MX' + 2{}^tL'X' + P(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}) = 0$$

Définition Centre

On dit que O' est un centre pour la quadrique Σ si $L' = 0$, l'équation dans \mathcal{R}' est ${}^tX'MX' + P(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}) = 0$.

Détermination du centre

– Existence.

Si M est inversible alors il existe un centre .

Preuve: $L' = 0$ si et seulement si $MX_{O'} + L = 0$, donc $MX_{O'} = -L$, ceci équivaut à $X_{O'} = -M^{-1}L$.

– Détermination.

On a vu que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}P}(x_0, y_0, z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0 + 2L$, donc $L' = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}P}(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}) = \vec{0}$

Les coordonnées $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ du centre O' sont solutions de $\overrightarrow{\text{grad}P}(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}) = \vec{0}$.

III.5 Équation réduite d'une quadrique.

Classification

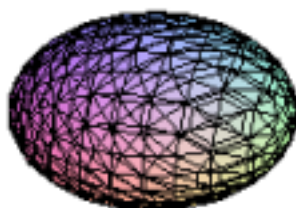
– Rang de M égal à 3.

La quadrique Σ est une quadrique à centre O' , dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sont les directions principales de la conique, Σ admet pour équation: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + l' = 0$ avec $l' = P(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$. On remarque que si deux valeurs propres sont égales alors la quadrique est de révolution.

◇ Supposons $l' \neq 0$.

On obtient quatre type de quadriques suivant le signe des valeurs propres de M .

$$\begin{array}{c} \text{type I)} \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \\ \text{Ellipsoïde.} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \text{type II)} \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1 \\ \text{Vide.} \end{array}$$