III Quadriques.

III.1 Définition.

Définition1.

Définition Quadrique

Soit P l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de la forme ;

$$P\left(x,y,z\right)=ax^2+by^2++cz^2+2dyz+2ezx+2fxy+2gx+2hy+2kz+l$$

On appelle quadrique, la surface de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne est de la forme $P\left(x,y,z\right)=0$.

Remarque.

On pose $Q\left(x,y,z\right)=ax^2+by^2++cz^2+2dxy+2ezx+2fxy$, Q est un polynôme homogène du second degré , c'est à dire que Q est une fonction polynomiale du second degré en x,y et z , de plus il est homogène de degré 2 car :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3,\ \ Q\left(tx,ty,tz\right)=t^2Q\left(x,y,z\right)$$

.

On pose $F\left(x,y,z\right)=2gx+2hy+2kz$, F est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, la matrice L de F dans la base canonique de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ est $L=\begin{pmatrix} g\\ h\\ k\end{pmatrix}$

si $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ alors $F\left(x,y,z\right)=2^tLX$

On note $M=\begin{pmatrix} a & f & e\\ d & b & d\\ e & d & c\end{pmatrix}$, on a ${}^tXMX=Q\left(x,y,z\right)$.

Donc la quadrique a pour équation

$${}^tXMX+2^tLX+l=0$$

III.2 Plan tangent.

Le vecteur $\overrightarrow{gradP}\left(x_0,y_0,z_0\right)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}\left(x_0,y_0,z_0\right)\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}\left(x_0,y_0,z_0\right)\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}\left(x_0,y_0,z_0\right)\end{pmatrix}$

donc

$$\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} 2ax_0+2fy_0+2ez_0+2g \\ 2fx_0+2by_0+2dz_0+2h \\ 2ex_0+2dy_0+2cz_0+2k \end{pmatrix}$$

On note toujours $M=\begin{pmatrix} a & f & e \\ d & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0+2L$

avec $X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

M_0 est régulier si $MX_0+L\neq 0$.

Le plan tangent en un point régulier est :

$$(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial P}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$$

Sous forme matricielle, ${}^t\left(2MX_0+2L\right)\left(X-X_0\right)=0$, c'est à dire $2^tX_0MX-2^tX_0MX_0+^t2LX-^t2LX_0=0$

Or ${}^tX_0MX_0+2^tLX_0+l=0$, on en déduit que le plan tangent a pour équation en un point régulier,

$$^tX_0MX+{}^tL\left(X+X_0\right)+l=0$$

D'où la "règle " de dédoublement des termes, on remplace les carrés comme x^2 par xx_0, $xz+xz$ est remplacé par xz_0+x_0z et la somme $x+x$ par $x+x_0$.

Exemple : $\sum:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}+4xz+4x+8y+10z=0$

Le plan tangent en M_0 régulier a pour équation ;

$$\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}+\frac{zz_0}{16}+2\left(xz_0+x_0z\right)+2\left(x+x_0\right)+4\left(y+y_0\right)+5\left(z+z_0\right)=0.$$

III.3 Élimination des termes rectangles. (changement de base)

Parmi les termes du second degré, on cherche à conserver uniquement les carrés, pour pouvoir caractériser les quadriques par leurs équations réduites.

La méthode consiste à changer de repère orthonormé, une méthode parmi d'autres (toujours regarder avant, si l' évidence n'est pas devant nous) consiste à diagonaliser la matrice symétrique réelle M.

On sait qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ telles que $U^{-1}MU=D$ soit

$M = UDU^{-1}$ou encore $M = UD\,{}^tU$.

On a ${}^tXMX ={}^t XUD\,{}^tUX ={}^t ({}^tUX)\,D\,({}^tUX)$, on pose $Y ={}^t UX = U^{-1}X$.

On sait que si $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice M, la matrice Y des coordonnées d'un vecteur dans la base $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est égale à $U^{-1}X$ où X est la matrice des coordonnées de ce vecteur dans la base canonique $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ et U est la matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ à la base $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$. Les nouveaux axes du repère $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ sont appelés axes principaux de la quadrique.

On note $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$Q(x,y,z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

L'équation de la quadrique dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = \left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est ${}^tYDY +{}^t LUY + l = 0$

Soit ${}^tYDY +{}^t L'Y + l = 0$ avec $L' ={}^t UL$.

III.4 Quadriques à centre.(changement d'origine)

On change l'origine du repère, on note $\mathcal{R} = \left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ et $\mathcal{R}' = \left(O',\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$, X la matrice des coordonnées dans $\mathcal{R}$, X' la matrice es coordonnées dans $\mathcal{R}'$, $X_{O'}$ la matrice des coordonnées dans $\mathcal{R}$ de O' dans le repère $\mathcal{R}$.

On a $X' = X - X_{O'}$ ou encore $X = X' + X_{O'}$.

On remplace dans l'équation de la quadrique; ${}^t(X' + X_{O'})\,M\,(X' + X_{O'}) + 2{}^tL\,(X' + X_{O'}) + l = 0$.

On développe et on obtient :

$${}^tX'MX' + 2\left({}^tX_{O'}M +{}^t L\right)X' + \left({}^tX_{0'}MX_{0'} + 2{}^tLX_{O'} + l\right) = 0$$

On remarque que $P(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = ({}^tX_{0'}MX_{0'} + 2{}^tLX_{O'} + l)$.
On pose $L' = MX_{O'} + L$ on a :

$${}^tX'MX' + 2{}^tL'X' + P(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = 0$$

Définition Centre

On dit que O' est un centre pour la quadrique $\sum$ si $L' = 0$, l'équation dans $\mathcal{R}'$ est ${}^tX'MX' + P(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = 0$.

Détermination du centre

- Existence.
  Si M est inversible alors il existe un centre .
  Preuve : $L' = 0$ si et seulement si $MX_{O'} + L = 0$, donc $MX_{O'} = -L$, ceci équivaut à $X_{O'} = -M^{-1}L$.
- Détermination.
  On a vu que le vecteur $\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0 + 2L$, donc $L' = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{gradP}\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = \overrightarrow{0}$
  Les coordonnées $(x_{O'},y_{O'},z_{O'})$ du centre O' sont solutions de $\overrightarrow{gradP}\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = \overrightarrow{0}$.

III.5 Équation réduite d'une quadrique.

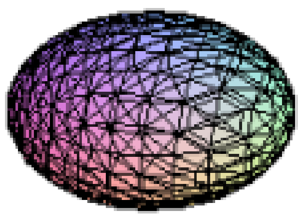
Classification

- Rang de M égal à 3.
  La quadrique $\sum$ est une quadrique à centre O', dans le repère $\mathcal{R}' = \left(O',\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ où $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ sont les directions principales de la conique, $\sum$ admet pour équation : $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + l' = 0$ avec $l' = P\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'})$. On remarque que si deux valeurs propres sont égales alors la quadrique est de révolution.
  ◇ Supposons $l' \neq 0$.
  On obtient quatre type de quadriques suivant le signe des valeurs propres de M.

type I)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

Ellipsoïde.



type II)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$$

Vide.