



Surfaces

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Plans tangents à une surface. | 2 |
| I.1 | Surfaces définies par paramétrages. | 2 |
| I.2 | Surface définies par équation cartésienne. | 5 |
| I.3 | Tangente à l'intersection de deux surfaces en des points où les plans tangents sont distincts. | 7 |
| II | Surfaces usuelles. | 9 |
| II.1 | Cylindre. | 9 |
| II.2 | Cône. | 13 |
| II.3 | Surfaces de révolution. | 17 |
| III | Quadriques. | 23 |
| III.1 | Définition. | 23 |
| III.2 | Plan tangent. | 23 |
| III.3 | Élimination des termes rectangles. (changement de base) | 24 |
| III.4 | Quadriques à centre.(changement d'origine) | 25 |
| III.5 | Équation réduite d'une quadrique. | 26 |
| IV | Exemples. | 33 |
| IV.1 | Contours apparents coniques. | 33 |
| IV.2 | Contours apparents cylindriques. | 35 |
| IV.3 | Exemple de sections planes d'une surface. | 36 |
| IV.4 | Exemple de courbes tracées sur une surface. | 38 |

I Plans tangents à une surface.

I.1 Surfaces définies par paramétrages.

Définition

Définition

Soit σ une application classe $C^k (k \geq 1)$ d'un ouvert O de l'espace euclidien \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

L'ensemble Σ des points (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels qu'il existe $(u, v) \in O$ vérifiant

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

est une surface définie par paramétrages (on dit aussi nappe paramétrée), u et v sont les paramètres.

Point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit Σ définie par paramétrages, un point M_0 de Σ associé aux paramètres u_0 et v_0 est régulier si et seulement si les vecteurs $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ forment une famille libre.

Plan tangent en un point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $M_0(u_0, v_0)$ un point régulier de Σ définie par paramétrages, on appelle plan tangent à Σ en M_0 le plan Π_{M_0} passant par M_0 et de direction $\text{Vect} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$.

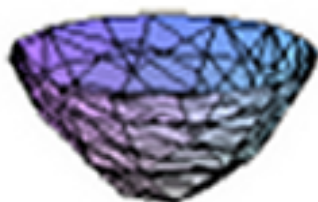
$$P(x, y, z) \in \Pi_{M_0} \text{ si et seulement si } \det \left(\overrightarrow{M_0 P}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = 0.$$

Exemple :

$$\text{Soit la surface } \Sigma \text{ définie par } \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{v}{u^2 + v^2} \text{ pour } (u, v) \neq (0, 0). \\ z = \frac{1}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent Π_{M_0} à Σ en point régulier M_0 .

Déterminer l'ensemble des points M_0 de Σ où Π_{M_0} est parallèle à la droite Δ d'équations $x = y = z$.



$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ a pour coordonnées } \begin{vmatrix} \frac{v_0^2 - u_0^2}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \\ \frac{-2u_0v_0}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \\ \frac{-2u_0}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ a pour coordonnées } \begin{vmatrix} \frac{-2u_0v_0}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \\ \frac{u_0^2 - v_0^2}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \\ \frac{-2v_0}{(u_0^2 + v_0^2)^2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{1}{(u_0^2 + v_0^2)^4} \begin{vmatrix} 2u_0(v_0^2 + u_0^2) \\ 2v_0(v_0^2 + u_0^2) \\ -(u_0^2 + v_0^2)^2 \end{vmatrix}$$