Surfaces

Sommaire

I Plans tangents à une surface.

I.1 Surfaces définies par paramétrages.

Définition

Définition

Soit σ une application classe $C^k(k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$(u,v) \mapsto (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

L'ensemble $\sum$ des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe $(u,v) \in O$ vérifiant

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

est une surface définie par paramétrages (on dit aussi nappe paramétrée), u et v sont les paramètres.

Point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $\sum$ définie par paramétrages, un point M_0 de $\sum$ associé aux paramètres u_0 et v_0 est régulier si et seulement si les vecteurs $\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ forment une famille libre.

Plan tangent en un point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point régulier de $\sum$ définie par paramétrages, on appelle plan tangent à $\sum$ en M_0 le plan $\prod_{M_0}$ passant par M_0 et de direction $\text{Vect}\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$.

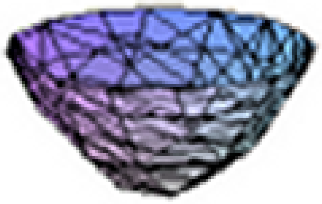
$$P(x,y,z) \in \prod_{M_0} \textit{ si et seulement si det} \left(\overrightarrow{M_0P}, \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right) = 0.$$

Exemple :

Soit la surface $\sum$ définie par $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ z = \dfrac{1}{u^2+v^2} \end{cases}$ pour $(u,v) \neq (0,0)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent $\prod_{M_0}$ à $\sum$ en point régulier M_0.

Déterminer l'ensemble des points M_0 de $\sum$ où $\prod_{M_0}$ est parallèle à le droite Δ d'équations $x = y = z$.



$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \quad \textit{a pour coordonnées} \left| \begin{array}{c} \dfrac{v_0^2 - u_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2u_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0) \quad \textit{a pour coordonnées} \left| \begin{array}{c} \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{u_0^2 - v_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{1}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^4} \left| \begin{array}{l} 2u_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ 2v_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ -\left(u_0^2+v_0^2\right)^2 \end{array} \right.$$