Surfaces

Sommaire

I Plans tangents à une surface.

I.1 Surfaces définies par paramétrages.

Définition

Définition

Soit σ une application classe $C^k (k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$(u,v) \mapsto (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

L'ensemble $\sum$ des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe $(u,v) \in O$ vérifiant

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

est une surface définie par paramétrages (on dit aussi nappe paramétrée), u et v sont les paramètres.

Point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $\sum$ définie par paramétrages, un point M_0 de $\sum$ associé aux paramètres u_0 et v_0 est régulier si et seulement si les vecteurs $\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ forment une famille libre.

Plan tangent en un point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point régulier de $\sum$ définie par paramétrages, on appelle plan tangent à $\sum$ en M_0 le plan $\prod_{M_0}$ passant par M_0 et de direction $\text{Vect}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$.

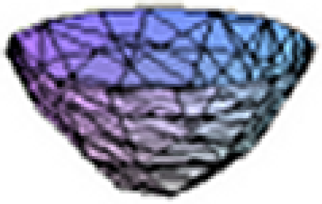
$$P(x,y,z) \in \prod_{M_0} \textit{ si et seulement si det} \left(\overrightarrow{M_0P}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right) = 0.$$

Exemple :

Soit la surface $\sum$ définie par $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ \\ z = \dfrac{1}{u^2+v^2} \end{cases}$ pour $(u,v) \neq (0,0)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent $\prod_{M_0}$ à $\sum$ en point régulier M_0.

Déterminer l'ensemble des points M_0 de $\sum$ où $\prod_{M_0}$ est parallèle à le droite Δ d'équations $x = y = z$.



$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \quad \textit{a pour coordonnées} \left| \begin{array}{c} \dfrac{v_0^2 - u_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2u_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0) \quad \textit{a pour coordonnées} \left| \begin{array}{c} \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{u_0^2 - v_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\[2ex] \dfrac{-2v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{1}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^4} \left| \begin{array}{l} 2u_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ 2v_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ -\left(u_0^2+v_0^2\right)^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{1}{(u_0^2+v_0^2)^3}\left|\begin{array}{l}2u_0\\2v_0\\-(u_0^2+v_0^2)\end{array}\right.$$

$(u_0^2+v_0^2)\neq 0$ donc le point est régulier et le plan tangent en M_0 a pour équation :

$$2u_0\left(x-\frac{u_0}{u_0^2+v_0^2}\right)+2v_0\left(y-\frac{v_0}{u_0^2+v_0^2}\right)-\left(u_0^2+v_0^2\right)\left(z-\frac{1}{u_0^2+v_0^2}\right)=0$$

$$\prod_{M_0}\ :\ 2u_0x+2v_0y-\left(u_0^2+v_0^2\right)z-1=0$$

$\prod_{M_0}$ est parallèle à Δ si $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0,v_0)$ est orthogonale à $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc si

$\{\,2u_0+2v_0-(u_0^2+v_0^2)=0$ donc $\begin{cases}x_0=\dfrac{u_0}{2(u_0+v_0)}\\ y_0=\dfrac{v_0}{2(u_0+v_0)}\end{cases}$ et $x_0+y_0=\dfrac{1}{2}$

de plus on remarque que $x_0^2+y_0^2=z_0$, l'ensemble cherché est inclus dans $\mathcal{P}\begin{cases}x_0^2+y_0^2=z_0\\ x_0+y_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Réciproquement, soit $M_0\in P$, $z_0\neq 0$ car sinon $x_0=y_0$ ce qui est impossible, on pose $\begin{cases}u_0=\dfrac{x_0}{z_0}\\ v_0=\dfrac{y_0}{z_0}\end{cases}$

on a $u_0^2+v_0^2=\dfrac{1}{z_0}$ donc $z_0=\dfrac{1}{u_0^2+v_0^2}$, $x_0=\dfrac{u_0}{u_0^2+v_0^2}$ et $y_0=\dfrac{v_0}{u_0^2+v_0^2}$ de plus $2u_0+2v_0-(u_0^2+v_0^2)=0$, donc l'ensemble cherché est donc l'ensemble $\mathcal{P}$ qui est l'intersection d'un plan parallèle à l'axe $z\prime 0z$ avec la surface $\sum$.

On se place dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ avec $\overrightarrow{K}$ normal unitaire au plan d'équation $x+y=\dfrac{1}{2}$.

On note (X,Y,Z) les coordonnées de M dans le nouveau repère, on a $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{K}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et dans le nouveau repère $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{K}=Z$ d'où

$Z=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. On remarque que $\left(\overrightarrow{OM}\right)^2=x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$.

On remarque que l'on peut choisir $\overrightarrow{I}=\overrightarrow{k}$ car $\overrightarrow{K}.\overrightarrow{k}=0$.

D'où $z=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{k}=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{I}=X$, d'où $z=x^2+y^2$ équivaut à $X=(X^2+Y^2+Z^2)-X^2$

Les équations de $\mathcal{P}$ dans le nouveau repère sont

$$\begin{cases}Z=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\\ X=(Y^2+Z^2)\end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} Z = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ X = Y^2 + \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ est donc une parabole.

I.2 Surface définies par équation cartésienne.

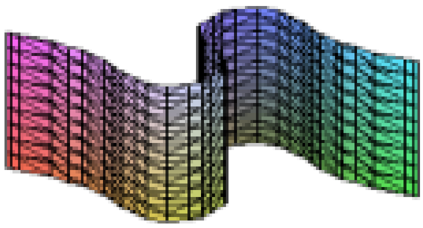
Définition.

Définition

Soit f une application de classe $C^k(k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de l'espace euclidien ^{3} dans $\mathbb{R}$. Soit $\sum = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = 0\}$, $\sum$ est la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$.

Exemple :

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 2x$.



Point régulier à une surface définie par une équation cartésienne.

Définition

On dit qu'un point $M(a,b,c) \in \sum$ est régulier si $\overrightarrow{grad f}(a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$, où $\overrightarrow{grad f}(a,b,c)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Propriétés

– Vecteur normal à $\sum$.

Soit $M(a,b,c)$ un point régulier de $\sum$ d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$, $\overrightarrow{grad f}(a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$, on suppose par exemple que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$, d'après le théorème des fonctions implicites, il

existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b), un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant c, une application φ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ de U dans V telle que $\forall (x,y,z) \in U \times V$, $z = \varphi(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$.
On obtient une représentation paramétrique locale σ de la surface $\sum$ de la forme ;

$$\left| \begin{array}{ccc} U & \sigma\longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,\ \varphi(x,y)) \end{array} \right.$$

$\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(a,b)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial\ \varphi}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}(a,b)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial\ \varphi}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$

$\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(a,b) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial y}(a,b)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial x}(a,b) \\ -\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial y}(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que la famille des vecteurs $\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial \sigma}{\partial y}(a,b)\right)$ est une famille libre.

- De plus par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U , l'application nulle sur U, définie par ; $(x,y) \mapsto f(,x,y,\ \varphi(x,y))$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
  En calculant les dérivées partielles par rapport à x et à y au point de coordonnées (a,b) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

On en déduit compte tenu de $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ que ;

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)} \\ -\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial y}(a,b) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)} \end{cases}$$

On obtient alors
$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(a,b) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(a,b) = \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}\overrightarrow{gradf}(a,b,c)$$

On retrouve la définition du point régulier pour une surface définie sous forme paramétrée.

Plan tangent en un point régulier à une surface définie par équation cartésienne.

Définition

On appelle plan tangent en un point régulier $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, à la surface $\sum$ définie par une équation cartésienne, le plan passant par M_0 et admettant $\overrightarrow{gradf}\left(x_0,y_0,z_0\right)$ comme vecteur normal.

Une équation cartésienne est donc :

$$\left(x-x_0\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0,z_0\right)+\left(y-y_0\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0,z_0\right)+\left(z-z_0\right)\frac{\partial f}{\partial z}\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$$

I.3 Tangente à l'intersection de deux surfaces en des points où les plans tangents sont distincts.

On donne deux surfaces $\sum$ et $\sum'$ définies par deux équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{l}\sum\ ;\ f\left(x,y,z\right)=0\\ \sum'\ ;\ g\left(x,y,z\right)=0\end{array}\right.$

On suppose que $M\left(a,b,c\right)$ est régulier pour $\sum$ et $\sum'$ et la famille $\left(\overrightarrow{gradf}\left(a,b,c\right),\overrightarrow{gradg}\left(a,b,c\right)\right)$ est une famille libre car les plans tangents en M_0 sont distincts.

On a $\left(\overrightarrow{gradf}\left(a,b,c\right)\wedge\overrightarrow{gradg}\left(a,b,c\right)\right)\neq\overrightarrow{0}$, on peut supposer par exemple que sa première coordonnée $\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b,c\right) & \frac{\partial g}{\partial y}\left(a,b,c\right)\\ \frac{\partial f}{\partial z}\left(a,b,c\right) & \frac{\partial g}{\partial z}\left(a,b,c\right)\end{vmatrix}$ est non nulle.

On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction F ;

$$\left|\begin{array}{ccc}O\subset\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ \left(x,y,z\right) & \longmapsto & \left(f\left(x,y,z\right),g\left(x,y,z\right)\right)\end{array}\right.$$

F est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert O , la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(a,b,c\right),\frac{\partial F}{\partial z}\left(a,b,c\right)\right)$ est inversible , on peut donc exprimer explicitement localement y et z en fonction de x. Il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant a et un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant $\left(b,c\right)$, deux applications φ et ψ définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classes $\mathcal{C}^k$, vérifiant

$$\left\{\begin{array}{c}y=\ \varphi\left(x\right)\\ z=\psi\left(x\right)\\ \left(\ \varphi\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\in V\\ f\left(x,y,z\right)=0\\ g\left(x,y,z\right)=0\end{array}\right.$$

$\sum\cap\sum'$ est donc une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est le support de l'arc γ de classe $\mathcal{C}^k$

$$\gamma\left|\begin{array}{ccc}I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ x & \longmapsto & \left(x,\varphi\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\end{array}\right.$$

La tangente en (a,b,c) à l'arc γ en $M(a,b,c)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{T}\ (1,\varphi'(a),\psi'(a))$.

Or $f(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0$, en dérivant par rapport à x on a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + \varphi'(a)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + \psi'(a)\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = 0$, de même on a :

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b,c) + \varphi'(a)\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b,c) + \psi'(a)\dfrac{\partial g}{\partial z}(a,b,c) = 0$

ce qui se traduit par $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{gradf}(a,b,c).\overrightarrow{T} = 0 \\ \overrightarrow{gradg}(a,b,c).\overrightarrow{T} = 0 \end{array}\right.$ d'où $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{gradf}(a,b,c) \wedge \overrightarrow{gradg}(a,b,c)$.

On en déduit que la tangente à la courbe $\sum \cap \sum'$ est l'intersection des plans tangents en M aux surfaces $\sum$ et $\sum'$.

On a des résultats identiques suivant le paramétrage local choisit.

II Surfaces usuelles.

II.1 Cylindre.

Définition.

Définition Cylindre

Un cylindre est une réunion de droites parallèles, une de ces droites s'appelle une génératrice du cylindre.
On appelle direction du cylindre la direction commune de toutes ces droites.

Définition Section droite

On appelle section droite l'intersection du cylindre avec un plan orthogonal à la direction du cylindre.

Equations paramétriques d'un cylindre.

Définition

Soit la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie par $A \in \Gamma$ si et seulement $\overrightarrow{OA} = F(t)$ où F est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$.
On dit que Γ est une directrice du cylindre $\sum$ de direction le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, si et seulement si toute génératrice du cylindre $\sum$ rencontre Γ.

$M(x,y,z) \in \sum$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \Gamma$, $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{OM} = F(t) + \lambda \overrightarrow{u}$.

Plan tangent à un cylindre

–
$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}(t_0,\lambda_0) = F'(t_0)$$

et

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda}(t_0,\lambda_0) = \overrightarrow{u}$$

Le point $M_0(t_0,\lambda_0)$ est régulier si et seulement si les vecteurs $F'(t_0)$ et $\overrightarrow{u}$ forment une famille libre, le plan tangent en un point régulier M_0 est de direction $Vect(F'(t_0), \overrightarrow{u})$, il est constant le long d'une génératrice du cylindre.

– Exemple : $\sum$ cylindre de directrice $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$ et de direction engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On cherche le plan tangent au point $M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$ soit $\left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$

```
> with(plots):
```

```
> x:=(u,v)->u^2+v;
```

$$x := (u, v) \to u^2 + v$$

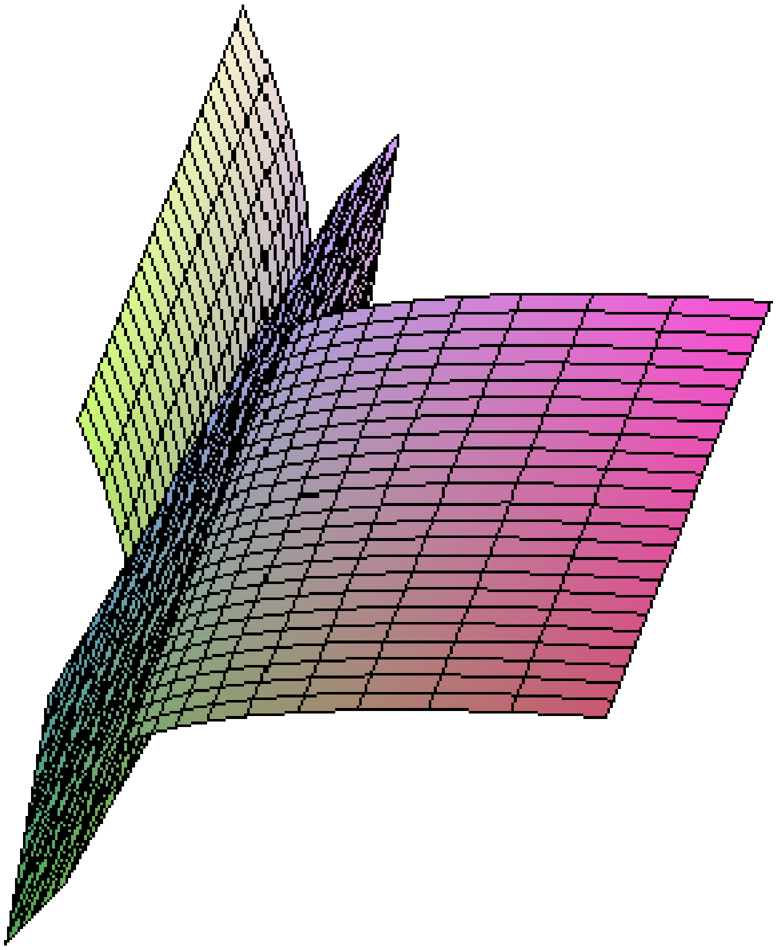
```
> y:=(u,v)-> u^3-2*v;
```

$$y := (u, v) \to u^3 - 2\,v$$

```
> z:=(u,v)->1/(u^2+1)+3*v;
```

$$z := (u, v) \to \frac{1}{u^2+1} + 3\,v$$

```
> A:=plot3d([x(u,v),y(u,v),z(u,v)],u=-10..10,v=-30..30):
> B:=implicitplot3d(8*(x-2)-13/2*(y+1)-7*(z-7/3)=0,x=-80..80,y=-100..10
> 0,z=-150..150):
> display3d(A,B);
```



Equation cartésienne d'un cylindre.

Propriétés

- Cas particulier important.
  Soit $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ un repère de E (euclidien de dimension 3), soit Γ la courbe d'équation $\begin{cases} z=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$
  f de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$, le cylindre $\sum$ de direction engendrée par $\overrightarrow{k}$ et de directrice Γ est la surface d'équation $f(x,y)=0$ dans $\mathbb{R}^3$.
  Exemple : $x^3+y^{2004}=\pi$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$.
- Soit deux équations de plans vectoriels $\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$, P et Q sont deux formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$.
  $P(x,y,z)=ax+by+cz$ et $Q(x,y,z)=a'x+b'y+c'z$, les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
  Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $f(P(x,y,z),Q(x,y,z))=0$
  est un cylindre d'axe l'intersection des deux plans P et Q .

  ◇ Supposons les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') orthogonaux , on choisit $\overrightarrow{I}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J}\dfrac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{K}=\overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J}$. On note (X,Y,Z) les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$, on a $ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{I}$, donc
  $ax+by+cz=X\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, de même $a'x+b'y+c'z=Y\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$
  $f(P,Q)=f\left(X\sqrt{a^2+b^2+c^2},Y\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\right)=g(X,Y)$, d'après le cas particulier , $\sum$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$, or $\overrightarrow{K}$ est un vecteur directeur de $P\cap Q$.
  ◇ Si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ forment une famille libre, d'après le procédé de Schmidt dans les espaces euclidiens, on sait qu'il existe $\overrightarrow{I}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}$, $(\beta\neq 0)$ tels que la famille $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ soit orthonormée, on pose $\overrightarrow{K}=\overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J}$.
  On a $ax+by+cz=X\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ soit $P(x,y,z)=\|\overrightarrow{u}\|X$
  $Y=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{J}=\overrightarrow{OM}.\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}\right)=\alpha P(x,y,z)+\beta Q(x,y,z)$, donc $Q(x,y,z)=\dfrac{1}{\beta}(Y-\alpha\|\overrightarrow{u}\|X)$
  $f(P,Q)=f\left(\|\overrightarrow{u}\|X,\dfrac{1}{\beta}(Y-\alpha\|\overrightarrow{u}\|X)\right)=g(X,Y)$, d'après le cas particulier , $\sum$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$, or $\overrightarrow{K}$ est un vecteur directeur de $P\cap Q$.

II.2 Cône.

Définition.

Définition

On appelle cône de sommet Ω une réunion de droites passant par Ω.

Equations paramétriques d'un cône.

Soit la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie par $A \in \Gamma$ si et seulement $\overrightarrow{OA} = F(t)$ où F est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$.

On dit que Γ est une directrice du cône $\sum$ de sommet Ω, si et seulement si pour tout point $M \neq \Omega$ du cône $\sum$, la droite (ΩM) rencontre la directrice Γ.

$M(x,y,z) \in \sum$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \Gamma$, $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$, donc $\overrightarrow{OM} = \lambda F(t) + (1-\lambda)\overrightarrow{O\Omega}$.

$\overrightarrow{OM} = \lambda\left(F(t) - \overrightarrow{O\Omega}\right) + \overrightarrow{O\Omega}$, on pose $G(t) = F(t) - \overrightarrow{O\Omega}$ et on obtient alors $\overrightarrow{OM} = \lambda G(t) + \overrightarrow{O\Omega}$.

Plan tangent à un cône .

– $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}(t_0,\lambda_0) = \lambda_0 G'(t_0)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda}(t_0,\lambda_0) = G(t_0)$.
Le point $M_0(t_0,\lambda_0)$ est régulier si et seulement si les vecteurs $\lambda_0 \neq 0$ et $G'(t_0)$ et $G(t_0)$ forment une famille libre, le plan tangent en un point régulier $M_0,\lambda_0 \neq 0$, est de direction $Vect(G(t_0), G'(t_0))$, le plan tangent est invariant sur la droite $(M_0\Omega)$.

– Exemple : $\sum$ cône de directrice $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$ et de sommet $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On obtient si $M(x,y,z) \in \sum$ alors

$$\begin{cases} x = \lambda(t^2 - 1) + 1 \\ y = \lambda(t^3 + 2) - 2 \\ z = \lambda\left(\dfrac{1}{1+t^2} - 3\right) + 3 \end{cases}$$

On cherche le plan tangent au point $M_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$$G(t)\begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 + 2 \\ \dfrac{1}{1+t^2} - 3 \end{pmatrix} \quad G'(t)\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$G\left(1\right)\begin{pmatrix}0\\3\\-\dfrac{5}{2}\end{pmatrix} G'\left(1\right)\begin{pmatrix}2\\3\\\dfrac{-1}{2}\end{pmatrix} G\left(1\right)\wedge G'\left(1\right)\begin{pmatrix}6\\-5\\-6\end{pmatrix}$$

Le plan tangent en M_0 a pour équation :

$$6\left(x-1\right)-5\left(y-1\right)-6\left(z-\frac{1}{2}\right)=0.$$

```
> with(plots):
> x:=(t,v)->(t^2-1)*v+1;
```

$$x := \left(t,v\right)\to\left(t^2-1\right)v+1$$

```
> y:=(t,v)-> (t^3+2)*v-2;
```

$$y := \left(t,v\right)\to\left(t^3+2\right)v-2$$

```
> z:=(t,v)->(1/(t^2+1)-3)*v+3;
```

$$z := \left(t,v\right)\to\left(\frac{1}{t^2+1}-3\right)v+3$$

```
> A:=plot3d([x(t,v),y(t,v),z(t,v)],t=-1.5..2,v=-5..5):
> B:=implicitplot3d(6*(x-1)-5*(y-1)-6*(z-1/2)=0,x=-5..5,y=-7..7,z=-10..
> 10):
> display3d(A,B);
```