PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Une urne contient n ($n \geq 2$) boules numérotées de 1 à n. On effectue n prélèvements successifs d'une boule de cette urne. Soit $p \in \{2, \dots, n\}$. On note E_p l'événement : « le numéro de la $p^{\text{ème}}$ boule tirée est inférieur ou égal aux numéros des boules précédemment tirées ».

1) Les prélèvements se font avec remise dans l'urne, à chaque fois, de la boule tirée.

Montrer que $P(E_p) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\dfrac{j}{n}\right)^{p-1}$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p(E_p)$.

2) On suppose maintenant que les prélèvements se font sans remise dans l'urne de la boule tirée.

a) Montrer que $P(E_p) = \dfrac{1}{p}$.

b) On convient que l'événement E_1 est certain et on considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de valeurs de k pour lesquelles l'événement E_k s'est réalisé. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note Y_i la variable qui vaut 1 si E_i est réalisé et 0 sinon.

Quel lien y-a-t-il entre X_n et les variables $Y_1, \dots, Y_n$?

En déduire une expression de l'espérance de X_n.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.