

**PROBABILITES DISCRETES****ENONCE DE L'EXERCICE****ENONCE :**

Une urne contient n ($n \geq 2$) boules numérotées de 1 à n . On effectue n prélèvements successifs d'une boule de cette urne. Soit $p \in \{2, \dots, n\}$. On note E_p l'événement : « le numéro de la $p^{\text{ème}}$ boule tirée est inférieur ou égal aux numéros des boules précédemment tirées ».

1) Les prélèvements se font avec remise dans l'urne, à chaque fois, de la boule tirée.

Montrer que $P(E_p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^{p-1}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(E_p)$.

2) On suppose maintenant que les prélèvements se font sans remise dans l'urne de la boule tirée.

a) Montrer que $P(E_p) = \frac{1}{p}$.

b) On convient que l'événement E_1 est certain et on considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de valeurs de k pour lesquelles l'événement E_k s'est réalisé. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note Y_i la variable qui vaut 1 si E_i est réalisé et 0 sinon.

Quel lien y-a-t-il entre X_n et les variables Y_1, \dots, Y_n ?

En déduire une expression de l'espérance de X_n .