



## PROBABILITÉS DISCRETES

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Dans une urne contenant initialement  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : Si on note  $k$  ( $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec  $k$  boules supplémentaires portant toutes le numéro  $k$  ; on effectue alors un second tirage. On appelle  $X_1$  la variable égale au numéro de la boule tirée au premier tirage et  $X_2$  celle égale au numéro de la boule tirée au second tirage.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de  $X_1$ , ainsi que son espérance et sa variance.
- 2) a. Déterminer la loi de probabilité de  $X_2$  et vérifier que

$$\sum_{k=1}^n p(X_2 = k) = 1.$$

- b. Calculer  $j - n + \frac{n^2}{n+j}$  où  $j \in \mathbb{N}$  et montrer que l'espérance de  $X_2$  vaut :

$$E(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}.$$

- c. Déterminer un équivalent simple de  $E(X_2)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .