MECANIQUE

DYNAMIQUE DES SOLIDES

1 Cinétique

1.1 Principe de conservation de la masse

Enoncé du principe : Un ensemble matériel (E) vérifie le principe de conservation de la masse si tout sous ensemble (e) de cet ensemble matériel (E) a une masse m(e) constante au cours du temps

Ce qui donne avec une écriture mathématique : $\forall(e)\subset(E),\quad \forall t\ \ m(e)=\text{constante}$

Remarque : Ce modèle (principe) n'est plus vérifié dans le modèle de mécanique relativiste.

Conséquence pratique pour nos applications futures :

Soit $\vec{\varphi}(P;t)$ un champ quelconque de vecteur défini et différentiable en tout point P d'un ensemble matériel (E) qui vérifie le principe de conservation de la masse. Alors on peut écrire la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\forall P\in E}\vec{\varphi}(P,t)\,dm\right]=\int_{\forall P\in E}\frac{d\vec{\varphi}(P,t)}{dt}\,dm$$

La masse étant constante au cours du temps, on peut à souhait rentrer ou sortir les dérivées par rapport au temps des intégrations sur les ensembles matériels (intégration sur des volumes, des surfaces ou des lignes)

Rappel : Un champ de vecteur est une répartition (fonction) de vecteurs en tout point de l'espace.

1.2 Torseur cinétique d'un ensemble matériel

Définition : On appelle torseur cinétique d'un ensemble matériel (S) en mouvement dans un référentiel d'étude R, et on note : $\{C(S/R)\}$, le torseur défini en un point A quelconque de l'espace de la façon suivante :

$$\{C(S/R)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{R_C}(S/R)=\displaystyle\int_{\forall P\in S}\vec{V}(P\in S/R)\,dm\\ \vec{\sigma}_A(S/R)=\displaystyle\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm\end{array}\right\}_A$$

Avec dm la masse élémentaire. En générale pour un volume homogène (constitué du même matériaux sur tout son volume : $dm=\rho\,dv$ avec ρ la masse volumique du matériaux constituant l'ensemble matériel et dv un volume élémentaire de cet ensemble matériel.

- ☞ $\overrightarrow{R_C}(S/R)$ est la résultante cinétique de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport à R.
- ☞ $\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)$ est le moment cinétique en A de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport à R.

Déterminons la résultante cinétique : $\overrightarrow{R_C}(S/R)$

On reprend la définition de cette résultante :

$\overrightarrow{R_C}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\vec{V}(P\in S/R)\,dm$ Or d'après la définition du vecteur vitesse : $\vec{V}(P\in S/R)=\left[\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R$ avec O, l'origine du repère d'étude R. Donc on a :

$\overrightarrow{R_C}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\left[\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R dm$. Or d'après le principe de conservation de la masse, on peut sortir la dérivation par rapport au temps de l'intégrale, ce qui nous donne l'écriture suivante :

$\overrightarrow{R_C}(S/R)=\left[\dfrac{d\left(\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{OP}\,dm\right)}{dt}\right]_R$ Or la définition du centre d'inertie G d'un ensemble matériel (E) étant : $m\,\overrightarrow{OG}=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{OP}\,dm$, on trouve l'expression suivante pour la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{R_C}(S/R)=m\left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_R$$

Soit : $\overrightarrow{R_C}(S/R)=m\,\vec{V}(G\in S/R)$
avec m la masse totale de l'ensemble matériel (S) et G son centre d'inertie.

Vérifions que ce champ de vecteur est bien un torseur :

Nous devons vérifier que le champ de vecteur défini ci-dessus a bien une structure de torseur, c'est à dire que nous devons retrouver la relation caractéristique d'un torseur qui relie les moments de ce torseur en deux points quelconque de l'espace.

On considère donc 2 points A et B quelconque de l'espace. On part de la définition énoncée ci-dessus du moment cinétique en A de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport au repère d'étude R :

$\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$. D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right]\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

$$=\underbrace{\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{BP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm}_{\overrightarrow{\sigma}_B(S/R)}+\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AB}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ne dépendant pas du point d'intégration courant P, on peut le sortir de l'intégrale ainsi que le produit vectoriel. On trouve donc la relation suivante :
$\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\overrightarrow{\sigma}_B(S/R)+\overrightarrow{AB}\wedge\underbrace{\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{V}(P\in S/R)\,dm}_{\overrightarrow{R_C}(S/R)}$. Soit la relation caractéristique d'un torseur : Moment en A = Moment en B + $\overrightarrow{AB}$ vectoriel la résultante du torseur :

$$\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\overrightarrow{\sigma}_B(S/R)+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_C}(S/R)$$

Remarque :
On verra plus tard dans le cours comment déterminer (autrement que par intégration) le moment cinétique (en un point A quelconque) d'un ensemble matériel (S) dans son mouvement par rapport à un référentiel d'étude R : $\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)$

Bilan :
Le torseur cinétique est bien un torseur qui s'écrit :

$$\{C(S/R)\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_C}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{V}(P\in S/R)\,dm=m\,\overrightarrow{V}(G\in S/R)\\ \overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}(P\in S/R)\,dm\end{matrix}\right\}_A$$

, donc on peut écrire la relation : $\overrightarrow{\sigma}_A(S/R)=\overrightarrow{\sigma}_B(S/R)+\overrightarrow{AB}\wedge m\overrightarrow{V}(G\in S/R)$

1.3 Torseur dynamique d'un ensemble matériel

Le torseur dynamique est semblable au torseur cinétique mais au lieu de « parler » de vitesse, on parle d'accélération. Il suffit donc de replacer les vitesses des points courants P dans la définition du torseur cinétique par les accélérations de ces mêmes points courants P pour obtenir la définition du torseur dynamique. On obtient ainsi :

Définition : On appelle torseur dynamique d'un ensemble matériel (S) en mouvement dans un référentiel d'étude R, et on note : $\{D(S/R)\}$, le torseur défini en un point A quelconque de l'espace de la façon suivante :

$$\{D(S/R)\}=\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_D}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{\Gamma}(P\in S/R)\,dm\\ \overrightarrow{\delta}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma}(P\in S/R)\,dm\end{matrix}\right\}_A$$

Avec dm la masse élémentaire. En générale pour un volume homogène (constitué du même matériaux sur tout son volume : $dm=\rho\,dv$ avec ρ la masse volumique du matériaux constituant l'ensemble matériel et dv un volume élémentaire de cet ensemble matériel.

- ☞ $\overrightarrow{R_D}(S/R)$ est la résultante dynamique de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport à R.
- ☞ $\overrightarrow{\delta}_A(S/R)$ est le moment dynamique en A de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport à R.

<u>*Déterminons la résultante dynamique*</u> : $\overrightarrow{R_D}(S/R)$

On reprend la définition de cette résultante : $\overrightarrow{R_D}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm$ Or d'après la définition du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P\in S/R)=\left[\dfrac{d\vec{V}(P\in S/R)}{dt}\right]_R$ on a :

$\overrightarrow{R_D}(S/R)=\int_{\forall P\in S}\left[\dfrac{d\vec{V}(P\in S/R)}{dt}\right]_R dm$. Mais d'après le principe de conservation de la masse, on peut sortir la dérivation par rapport au temps de l'intégrale, ce qui nous donne l'écriture suivante :

$$\overrightarrow{R_D}(S/R)=\left[\frac{d\left(\int_{\forall P\in S}\vec{V}(P\in S/R)\,dm\right)}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\overrightarrow{R_C}(S/R)}{dt}\right]_R=m\left[\frac{d\vec{V}(G\in S/R)}{dt}\right]_R$$

Avec G centre d'inertie de l'ensemble matériel (E). D'où :

$\overrightarrow{R_D}(S/R)=m\vec{\Gamma}(G\in S/R)$

Soit : $\overrightarrow{R_D}(S/R)=m\vec{\Gamma}(G\in S/R)$
avec m la masse totale de l'ensemble matériel (S) et G son centre d'inertie.

<u>*Vérifions que ce champ de vecteur est bien un torseur :*</u>

Nous devons vérifier que le champ de vecteur défini ci-dessus a bien une structure de torseur, c'est à dire que nous devons retrouver la relation caractéristique d'un torseur qui relie les moments de ce torseur en deux points quelconque de l'espace.

On considère donc 2 points A et B quelconque de l'espace. On part de la définition énoncée ci-dessus du moment dynamique en A de l'ensemble matériel S dans son mouvement par rapport au repère d'étude R :

$\vec{\delta}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm$. D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\vec{\delta}_A(S/R)=\int_{\forall P\in S}\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right]\wedge\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm$$

$$=\underbrace{\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{BP}\wedge\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm}_{\vec{\delta}_B(S/R)}+\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AB}\wedge\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ne dépendant pas du point d'intégration courant P, on peut le sortir de l'intégrale ainsi que le produit vectoriel. On trouve donc la relation suivante :

$\vec{\delta}_A(S/R)=\vec{\delta}_B(S/R)+\overrightarrow{AB}\wedge\underbrace{\int_{\forall P\in S}\vec{\Gamma}(P\in S/R)\,dm}_{\overrightarrow{R_D}(S/R)}$. Soit la relation caractéristique d'un torseur : Moment en A = Moment en B + $\overrightarrow{AB}$ vectoriel la résultante du torseur :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \vec{\delta}_B(S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_D}(S/R)$$

Bilan :

Le torseur dynamique est bien un torseur qui s'écrit :

$\{D(S/R)\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_D}(S/R) = \int_{\forall P \in S} \vec{\Gamma}(P \in S/R)\,dm = m\,\vec{\Gamma}(G \in S/R) \\ \vec{\delta}_A(S/R) = \int_{\forall P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R)\,dm \end{array}\right\}$, donc on peut écrire la relation : $\vec{\delta}_A(S/R) = \vec{\delta}_B(S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{\Gamma}(G \in S/R)$

1.4 Relation entre les torseurs cinétique et dynamique

On a vu que les définitions des torseurs cinétique et dynamique étaient très semblables. La seule différence est que l'on « parle » de vitesse dans le torseur cinétique et d'accélération dans le torseur dynamique. Or il y une relation de dérivation entre la vitesse et l'accélération. On s'attend donc à retrouver cette relation de dérivation entre les composantes (résultante et moment) des torseurs cinétique et dynamique.

Rappelons ce que l'on a déjà démontré sur les résultantes des torseurs cinétique et dynamique :

- $\overrightarrow{R_C}(S/R) = m\vec{V}(G \in S/R)$
- $\overrightarrow{R_D}(S/R) = m\vec{\Gamma}(G \in S/R)$

Or $\vec{\Gamma}(G \in S/R) = \left[\dfrac{d\vec{V}(G \in S/R)}{dt}\right]_R$. D'après le principe de conservation de la masse, celle-ci est constante au cours du temps, donc on peut écrire : $\overrightarrow{R_D}(S/R) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{R_C}(S/R)}{dt}\right]_R$

Ce résultat n'est pas de première importance puisque l'on sait calculer aussi bien la vitesse que l'accélération d'un centre d'inertie. On se rend cependant compte de ce caractère de dérivation entre les composantes des torseurs cinétique et dynamique.

Qu'en est-il sur les moments ?

On part de la définition du moment dynamique de (S/R) en un point A quelconque : $\vec{\delta}_A(S/R) = \int_{\forall P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R)\,dm$ et introduisons le fait que l'accélération est la dérivée de la vitesse : $\vec{\delta}_A(S/R) = \int_{\forall P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\dfrac{d\vec{V}(P \in S/R)}{dt}\right]_R dm$. Or la dérivée d'un vecteur résultat d'un produit vectoriel est la même que la dérivée d'un produit de deux fonctions scalaires : $(uv)' = u'v + uv'$, ce qui donne dans le cas du produit vectoriel :

 Emmanuel FARGES

$\left[\dfrac{d\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)}{dt}\right]_R = \left[\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right]_R \wedge\vec{v} \; + \; \vec{u}\wedge\left[\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right]_R$, ce qui peut encore s'écrire :

$\vec{u}\wedge\left[\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right]_R = \left[\dfrac{d\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)}{dt}\right]_R - \left[\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right]_R \wedge\vec{v}$. Appliquons cette relation à notre moment dynamique :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \int_{\forall P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\left[\frac{d\vec{V}(P\in S/R)}{dt}\right]_R dm$$

$$= \int_{\forall P\in S}\left[\frac{d\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\right)}{dt}\right]_R dm - \int_{\forall P\in S}\left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_R\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

Or d'après le principe de conservation de la masse énoncé au début du cours, on peut écrire :

$$\int_{\forall P\in S}\left[\frac{d\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\right)}{dt}\right]_R dm = \left[\frac{d\left(\int_{\forall P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm\right)}{dt}\right]_R$$

$$= \left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R$$

On trouve donc la relation entre moment dynamique et moment cinétique :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R - \int_{\forall P\in S}\left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_R\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

En introduisant l'origine du repère d'étude R notée O par Chasles entre les point A et P dans le vecteur $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$, on trouve :

$\left[\dfrac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_R = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R - \left[\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_R = \vec{V}(P\in S/R) - \vec{V}(A\in S/R)$, en injectant cela dans la relation trouvée ci-dessus, on obtient :

$$\vec{\delta}_A(S/R)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R-\int_{\forall P\in S}\left[\vec{V}(P\in S/R)-\vec{V}(A\in S/R)\right]\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

$$=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+\int_{\forall P\in S}\vec{V}(A\in S/R)\wedge\vec{V}(P\in S/R)\,dm$$

$$=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+\vec{V}(A\in S/R)\wedge\left(\int_{\forall P\in S}\vec{V}(P\in S/R)\,dm\right)$$

$$=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+\vec{V}(A\in S/R)\wedge\vec{R_C}(S/R)$$

$$=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+\vec{V}(A\in S/R)\wedge m\vec{V}(G\in S/R)$$

$$=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+m\vec{V}(A\in S/R)\wedge\vec{V}(G\in S/R)$$

Le moment dynamique en un point A de (S/R) n'est pas tout à fait la dérivée du moment cinétique en A de (S/R). Il ne faut pas oublier de rajouter le terme en produit vectoriel. :

$$\vec{\delta}_A(S/R)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R+m\,\vec{V}(A\in S/R)\wedge\vec{V}(G\in S/R)$$

Cas particuliers fréquemment rencontrés :

Si le point où l'on calcule ces moments est :

- Fixe dans R : **A fixe dans R** $\left(\vec{V}(A\in S/R)=\vec{0}\right)$, on a la relation de dérivation :

$$\vec{\delta}_A(S/R)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt}\right]_R$$

- Le centre d'inertie G : **A=G** $\left(\vec{V}(G\in S/R)\wedge\vec{V}(G\in S/R)=\vec{0}\right)$, on a la relation de dérivation : $\vec{\delta}_G(S/R)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R)}{dt}\right]_R$

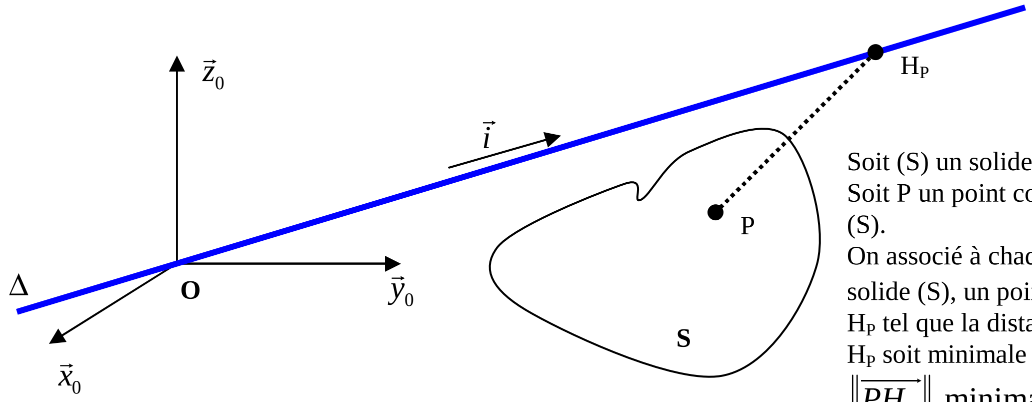
1.5 Energie cinétique

Définition : L'énergie cinétique d'un ensemble matériel (S) dans son mouvement par rapport au repère R est le scalaire positif suivant : $T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{\forall P\in S}\left[\vec{V}(P\in S/R)\right]^2dm$

1.6 Moment d'inertie d'un solide

1.6.1 Définitions

Soit $\Delta\left(O,\vec{i}\right)$ un axe défini par un point O et un vecteur directeur unitaire $\vec{i}$ dans un repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$. Posons $\vec{i}=\alpha\vec{x}_0+\beta\vec{y}_0+\gamma\vec{z}_0$ avec $\left\|\vec{i}\right\|=1$



Soit (S) un solide quelconque.
Soit P un point courant du solide (S).
On associé à chaque point P du solide (S), un point de Δ, noté H_P tel que la distance entre P et H_P soit minimale :
$\left\|\overrightarrow{PH_P}\right\|$ minimale

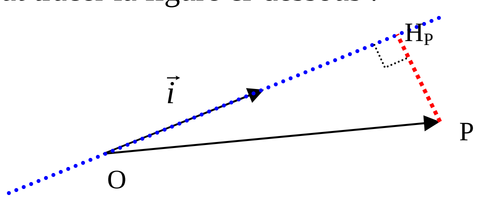
Soit (x, y, z) les coordonnées de P dans le repère R_0 : $\overrightarrow{OP}=x\,\vec{x}_0+y\,\vec{y}_0+z\,\vec{z}_0$

<u>Définition :</u> Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ est le scalaire positif homogène à des $Kg.m^2$: $I\left(S/\Delta\right)=\int_{\forall P\in S}\left[\overrightarrow{PH_P}\right]^2 dm$

Ces moments d'inertie correspondent à la somme (intégrale) des distances minimales des points du solide à l'axe au carré
Ce scalaire est aussi noté I_Δ et une autre définition équivalente pourrait être :

$I\left(S/\Delta\right)=\int_{\forall P\in S} d\left(P;\Delta\right)^2 dm$ soit la *<u>somme sur tout le solide (S) des distances minimales des points du solide à l'axe Δ au carré</u>*

En se plaçant dans le plan passant par le point courant P et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OP}$, on peut tracer la figure ci-dessous :



On remarque que :

$$\left\|\overrightarrow{PH_P}\right\|=\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\sin\left(\vec{i};\overrightarrow{OP}\right)$$
$$=\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\vec{i}\right\|\sin\left(\vec{i};\overrightarrow{OP}\right)$$
$$=\left\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}\right\|$$

Or $\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}=\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta z-\gamma y\\\gamma x-\alpha z\\\alpha y-\beta x\end{vmatrix}$, donc :

$\left[\overrightarrow{PH_P}\right]^2=\left\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}\right\|^2=\left(\beta z-\gamma y\right)^2+\left(\gamma x-\alpha z\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$. En développant cette expression, on obtient : $\left[\overrightarrow{PH_P}\right]^2=\alpha^2\left(y^2+z^2\right)+\beta^2\left(x^2+z^2\right)+\gamma^2\left(x^2+z^2\right)-2\alpha\beta xy-2\alpha\gamma xz-2\beta\gamma yz$.