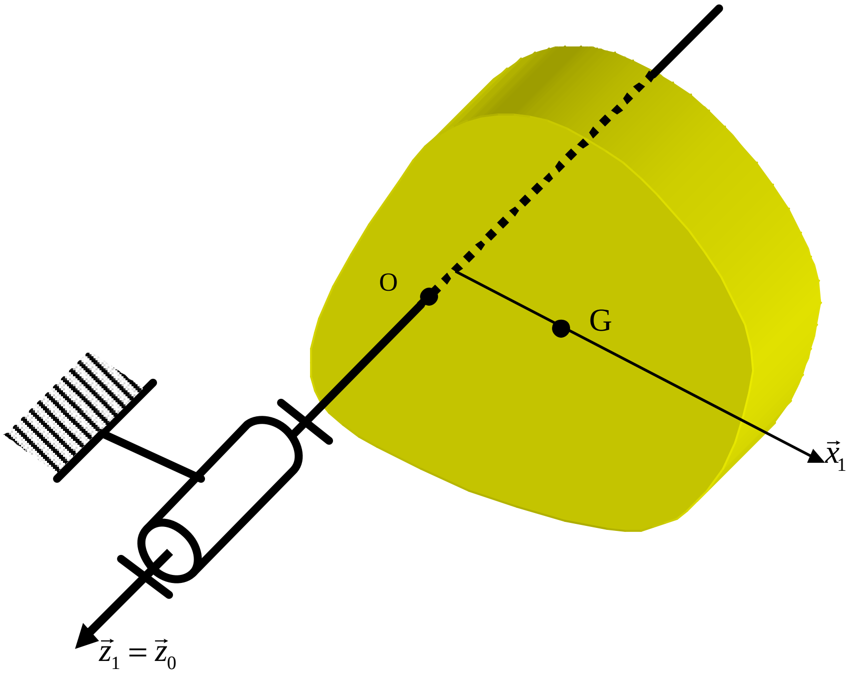
MECANIQUE

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION
EQUILIBRAGE

1 Etude dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Paramétrage du problème :

On considère un solide S_1 quelconque de centre d'inertie G, de base liée à son mouvement $\left(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right)$, de masse m tournant autour d'un axe fixe, c'est à dire en liaison pivot avec le bâti auquel on lie le repère d'étude $R_0\left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$.
Pour les besoins du calcul, considérons que cet axe de rotation soit l'axe $\left(O, \vec{z}_0\right)$, on peut prendre $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$.
Le solide S_1 étant de géométrie quelconque, son centre d'inertie n'a aucune raison d'être sur l'axe de rotation. Par contre, on peut très bien, c'est un choix de paramétrage, choisir d'aligner la droite orthogonale et sécante à l'axe de rotation passant par G avec $\vec{x}_1$ (voir figure).

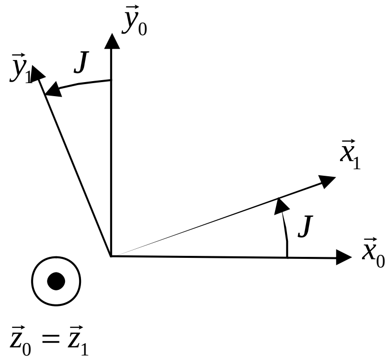


On peut donc paramétrer la position de G centre de gravité du solide S_1 par : $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_0$

Posons $J = \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right)$, on a alors la figure de travail suivante :

S_1 ne possède aucune symétrie particulière, donc sa matrice d'inertie en O dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est de la forme générale :

$$\left[I_O(S)\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1;\vec{y}_1;\vec{z}_0)}$$



Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S_1 :

On distingue les actions mécaniques extérieures transmises par des liaisons que l'on connaît, des actions mécaniques extérieures (autres que par des liaisons) :

- Le solide S_1 est en liaison uniquement avec le bâti par une liaison pivot. On a donc l'action mécanique transmissible par une liaison pivot, soit :

$$\left\{T(bati \to S_1)\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

- L'ensemble des actions mécaniques extérieures (autres que celle provenant de liaison) sont regroupées dans un seul torseur ramené en O, qui a donc la forme la plus générale (pas d'hypothèses particulière sur ces actions mécaniques :

$$\left\{T(ext \to S_1)\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

Déterminons, avant d'appliquer le principe fondamental de la dynamique, le torseur dynamique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport au bâti 0.

Calcul de la résultante dynamique :

$\overrightarrow{R_d}(S_1/0) = m\vec{\Gamma}(G \in S_1/0) = m\left[\dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right]_0$ or $\left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_0 = a\left[\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_0 + c\cancel{\left[\dfrac{d\vec{z}_0}{dt}\right]_0} = a\dot{J}\vec{y}_1$, d'où :

$$\overrightarrow{R_d}(S_1/0) = a\ddot{J}\vec{y}_1 - a\dot{J}^2\vec{x}_1$$

Calcul du moment dynamique en O :

Le moment cinétique en O (point fixe dans le mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$) est égal au produit de la matrice d'inertie en O par le vecteur vitesse de rotation de $S_1/0$: $\vec{\Omega}(S_1/0) = \vec{\Omega}(1/0) = \dot{J}\vec{z}_0$. Soit la quantité suivante :

$$\vec{s}_O(S_1/0) = {}_1\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{J} \end{vmatrix} = {}_1\begin{vmatrix} -E\dot{J} \\ -D\dot{J} \\ C\dot{J} \end{vmatrix} = -E\dot{J}\vec{x}_1 - D\dot{J}\vec{y}_1 + C\dot{J}\vec{z}_0.$$