Table des matières

I Topologie de RxR

I.1 Normes sur RxR

Définition

Pour tout vecteur $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on note $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|u\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

Proposition (*Deux normes sur $\mathbb{R}^2$*)

Les applications $u \mapsto \|u\|_2$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont des *normes*, en ce sens qu'elles vérifient :

- ◇ Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^2$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire.)
- ◇ Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$: $\|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.
- ◇ Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$, pour tout réel λ : $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

Remarques

- L'application $u \mapsto \|u\|_2$ est appelée *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^2$.
  Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
  On note $(u \mid v) = xx' + yy'$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.
  Alors, pour tout u de $\mathbb{R}^2$, $\|u\|_2 = \sqrt{(u \mid u)}$.
  On dit que la norme $u \mapsto \|u\|_2$ est associée au (ou découle du) produit scalaire canonique.
- Il existe d'autres normes sur $\mathbb{R}^2$.
  On peut par exemple poser, pour tout $u = (x, y)$, $\|u\|_1 = |x| + |y|$.
  On pourrait généraliser en introduisant $\|u\|_p = \sqrt[p]{|x^p| + |y^p|}$.
  Pour rester dans les limites du programme, on se limitera à $u \mapsto \|u\|_2$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$.

Proposition (*équivalence des deux normes*)

Les normes $u \mapsto \|u\|_2$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont *équivalentes*, en ce sens qu'il existe deux scalaires $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$: $\alpha\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \beta\|u\|_\infty$.
Plus précisément : $\forall\, u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{2}\|u\|_\infty$.

Remarques

- La définition précédente de l'équivalence des deux normes est symétrique.
  Pour tout u de $\mathbb{R}^2$, on a en effet : $\frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty \leq \|u\|_2$.
- L'intérêt de cette notion est que les définitions qui seront présentées dans la suite de ce chapitre, ainsi que les propriétés qui en découlent, ne dépendent pas de la norme utilisée (sauf exception signalée.)
  On notera donc $\|u\|$ pour désigner indifféremment $\|u\|_2$ ou $\|u\|_\infty$.

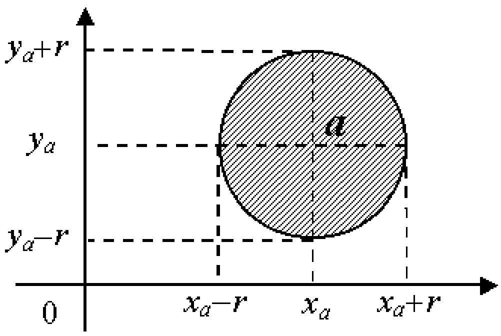
I.2 Boules ouvertes ou fermées

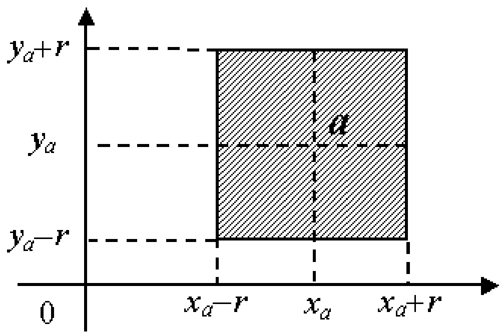
Définition

Soit $u \mapsto \|u\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Soient a un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.
On note $\mathcal{B}(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^2, \|u-a\| < r\}$, et $\overline{\mathcal{B}}(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^2, \|u-a\| \leq r\}$.
On dit que $\mathcal{B}(a,r)$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
De même, $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ est appelée *boule fermée* de centre a et de rayon r.

Remarques

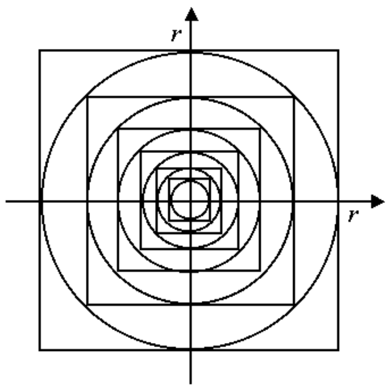
– Les boules ouvertes et fermées dépendent bien sûr de la norme utilisée.
Voici par exemple comment illustrer $\overline{\mathcal{B}}(a,r)$ pour la norme $u \mapsto \|u\|_2$ puis pour $u \mapsto \|u\|_\infty$.





– L'équivalence des normes $u \mapsto \|u\|_2$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ peut se traduire de la manière suivante : toute boule ouverte de centre a, pour l'une des deux normes, contient une boule ouverte de même centre pour l'autre norme.

Par exemple, la boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon r, pour la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$, contient la boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon r pour $u \mapsto \|u\|_2$, qui contient elle-même la boule de centre $\overrightarrow{0}$ et de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$ pour la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$.
On peut bien sûr poursuivre cette succession d'inclusions, comme on le voit ici.



Définition *(Parties bornées)*

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ est bornée s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}(\overrightarrow{0}, r)$.

Remarques

– La définition précédente s'écrit aussi : $\exists\, r > 0, \forall\, a \in \mathcal{A},\ \|a\| \leq r$.

– Le caractère borné ou non d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ ne dépend pas de la norme utilisée (même si les valeurs de r dont il est question dans cette définition peuvent en dépendre.)

I.3 Suites d'éléments de RxR

Notations

- Tout suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^2$ est définie de manière unique par la donnée de deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$, quand on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (x_n, y_n)$.
  Les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont appelées *suites composantes* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
- L'ensemble des suites de $\mathbb{R}^2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel.
  Si $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$, on peut en effet écrire :
  $$u + v = (u_n + v_n)_{n\geq 0}, \quad \lambda u = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$$
- On dit que la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
  Cela équivaut à l'existence d'un réel $r > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq r$.
  Il est équivalent de dire que les deux suites composantes sont bornées dans $\mathbb{R}$.
- On peut définir une *sous-suite* (une *suite extraite*) u' de la suite u.
  Une telle suite est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
  Si on note $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ les suites composantes de la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$, alors celles de la suite $u' = (u'_n)_{n\geq 0}$ sont données par $\begin{cases} x'_n = x_{\varphi(n)} \\ y'_n = y_{\varphi(n)} \end{cases}$

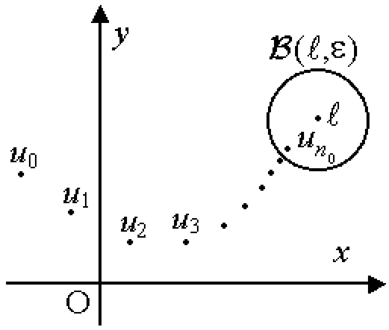
Définition *(Suites convergentes)*

Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^2$. Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}^2$.
On dit que la suite u *converge* vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
On dit encore que ℓ est la *limite* de la suite u et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Remarques et propriétés

- Bien entendu, la définition précédente (c'est-à-dire le caractère convergent ou non de la suite u, et la valeur de la limite) ne dépend pas de la norme utilisée.
  La seule chose qui en dépend est la valeur de l'entier n_0 à partir duquel $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$, mais cette valeur est sans importance : c'est le fait qu'il existe de tels n_0 qui compte.
- Dans la définition précédente, on peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$ par $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$.
- Posons $\ell = (\alpha, \beta)$ et $u_n = (x_n, y_n)$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta \end{cases}$
- On a des propriétés analogues à celles vues pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:
  - ◇ La limite de la suite u, si elle existe, est unique.
  - ◇ Si la suite u est convergente, alors elle est bornée.
  - ◇ Si la suite u converge vers ℓ, alors toutes ses sous-suites convergent vers ℓ.
  - ◇ Si la suite u converge vers ℓ, alors la suite $n \mapsto \|u_n\|$ converge vers $\|\ell\|$.
  - ◇ Si les suites u et v sont convergentes, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

– Voici une illustration de la convergence de la suite u vers ℓ dans $\mathbb{R}^2$:
La définition peut s'écrire :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in \overline{\mathcal{B}}(\ell, \varepsilon)$
On voit bien qu'étant donné $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe toujours un entier n_0 à partir duquel u_n est dans la boule de centre ℓ et de rayon ε.
L'entier n_0 à partir duquel on a $u_n \in \overline{\mathcal{B}}(\ell, \varepsilon)$ dépend de la valeur de ε.



Proposition *(Théorème de Bolzano-Weierstrass)*
De toute suite bornée de $\mathbb{R}^2$, on peut extraire une suite convergente.

I.4 Parties ouvertes ou fermées

Définition *(élément intérieur à une partie de $\mathbb{R}^2$)*
Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit a un élément de $\mathcal{A}$.
On dit que a est *intérieur* à $\mathcal{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{A}$.
On exprime aussi cette situation en disant que $\mathcal{A}$ est un *voisinage* du point a.

Définition *(élément adhérent à une partie de $\mathbb{R}^2$)*
Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit a un élément de $\mathbb{R}^2$.
On dit que a est *adhérent* à $\mathcal{A}$ si pour tout $r > 0$ on a $\mathcal{B}(a, r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Compléments (hors-programme)

– On appelle *intérieur* de $\mathcal{A}$ l'ensemble des points qui sont intérieurs à $\mathcal{A}$.
On appelle *adhérence* de $\mathcal{A}$ l'ensemble des points qui sont adhérents à $\mathcal{A}$.
Tout point intérieur à $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$. Tout point de $\mathcal{A}$ est adhérent à $\mathcal{A}$.
Ainsi l'intérieur de $\mathcal{A}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{A}$, lui même inclus dans son adhérence.

– On vérifie que l'intérieur de la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ est la boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$.
Inversement, l'adhérence de la boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ est la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$.

– On dit que a est un point d'accumulation de $\mathcal{A}$ si a est adhérent à $\mathcal{A} \setminus \{a\}$.
Cela équivaut à dire que pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(a, r) \cap (\mathcal{A} \setminus \{a\})$ est un ensemble infini.
Si $a \in \mathcal{A}$ n'est pas un point d'accumulation de A, on dit que a est isolé dans $\mathcal{A}$.
Cela équivaut à dire qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \cap \mathcal{A} = \{a\}$.

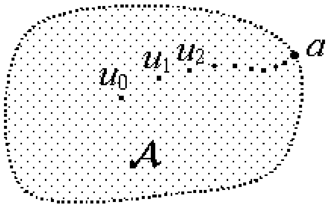
– Le point a est adhérent à $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ il n'est pas intérieur au complémentaire de $\mathcal{A}$.
De même, a est intérieur à $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ il n'est pas adhérent au complémentaire de $\mathcal{A}$.

– Les points qui sont à la fois adhérents à $\mathcal{A}$ et à son complémentaire sont appelés *points-frontière* de A. L'ensemble des points-frontière de $\mathcal{A}$ est appelé la *frontière* de $\mathcal{A}$.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des points adhérents)*

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit a un élément de $\mathbb{R}^2$.
a est adhérent de $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ il existe une suite u d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

On a représenté ici un ensemble $\mathcal{A}$.
Le point a est adhérent à $\mathcal{A}$, sur la "frontière".
Toute boule de centre a et de rayon $r > 0$ rencontre $\mathcal{A}$.
On montre ici une suite u de $\mathcal{A}$ convergeant vers a.



Définition *(Ensembles ouverts)*

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{A}$ est un *ouvert* si tout point de $\mathcal{A}$ est intérieur à $\mathcal{A}$, ou encore si $\mathcal{A}$ est un voisinage de chacun de ses points.
Donc $\mathcal{A}$ est ouvert si : $\forall\, a \in \mathcal{A},\ \exists\, r > 0,\ \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{A}$.

Définition *(Ensembles fermés)*

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ est *fermée* si son complémentaire est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Donc $\mathcal{A}$ est fermé si : $\forall\, a \notin \mathcal{A},\ \exists\, r > 0,\ \mathcal{B}(a, r) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Remarques et propriétés

- L'ensemble vide et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.
  L'ensemble $[0, 1[\times[0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.
- Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.
- Une réunion *quelconque* d'ouverts est ouverte. Une intersection *finie* d'ouverts est ouverte.
  Une intersection *quelconque* de fermés est fermée. Une réunion *finie* de fermés est fermée.
  Un singleton est un fermé. Une partie finie de $\mathbb{R}^2$ est un fermé.
- L'intérieur de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{A}$) est un ensemble ouvert inclus dans $\mathcal{A}$. C'est même, au sens de l'inclusion, le plus grand des ouverts inclus dans $\mathcal{A}$.
  L'ensemble $\mathcal{A}$ est ouvert si et seulement si il coïndice avec son intérieur.
- L'adhérence de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont adhérents à $\mathcal{A}$) est un ensemble fermé contenant $\mathcal{A}$. C'est même, au sens de l'inclusion, le plus petit des fermés contenant $\mathcal{A}$.
  L'ensemble $\mathcal{A}$ est fermé si et seulement si il coïndice avec son adhérence.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des fermés)*

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence :
$\mathcal{A}$ est fermé$\Leftrightarrow$pour toute suite u convergente d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{A}$
Autrement dit, $\mathcal{A}$ est fermé$\Leftrightarrow$il contient les limites de ses suites convergentes.

Proposition *(Compacts de $\mathbb{R}^2$)*

On dit que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ est un *compact* si $\mathcal{A}$ vérifie les conditions équivalentes suivantes :
- L'ensemble $\mathcal{A}$ est fermé et borné.
- De toute suite de $\mathcal{A}$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans $\mathcal{A}$.

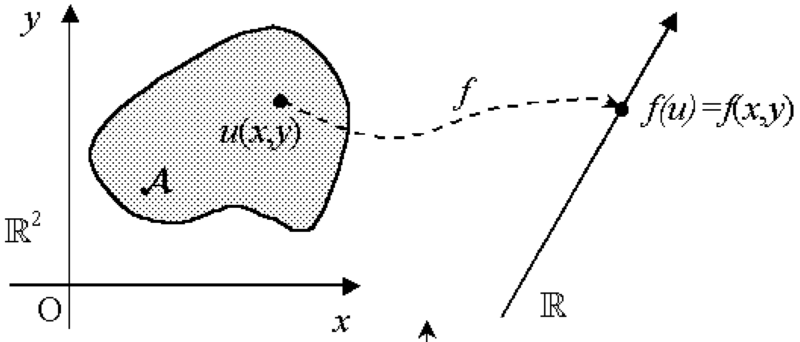
II Limites et continuité

II.1 Applications partielles, applications composantes

– Dans toute la suite, on considère des applications définies sur une partie $\mathcal{A}$ non vide de $\mathbb{R}^2$.
Ces applications pourront être à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$.

– On note $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{R}^2)$) l'ensemble des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).
Munis des opérations usuelles, $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{R})$ est une algèbre et $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{R}^2)$ est un espace vectoriel.

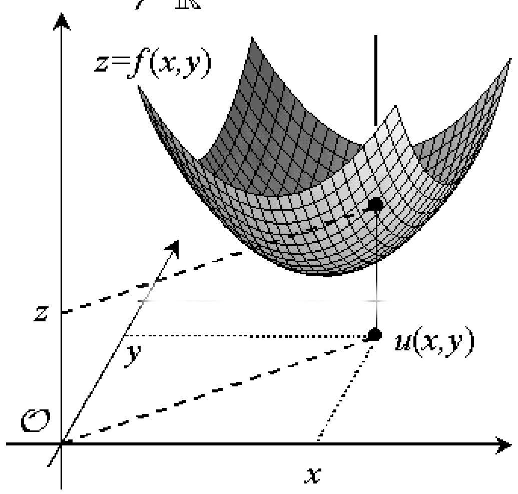
– En général les composantes d'un élément u de $\mathcal{A}$ sont notées x et y.
Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.
A tout point $u=(x,y)$ de $\mathcal{A}$ elle associe un réel noté $f(u)$ ou encore $f(x,y)$.
Par exemple, $f:(x,y)\mapsto\dfrac{\ln(x+y)}{x^2y^2+1}$ est définie sur $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>0\}$.
Voici comment il peut être commode de se représenter le "fonctionnement" d'une application f de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier l'image d'un point $u(x,y)$ de $\mathcal{A}$.



– Représentation graphique de $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$.

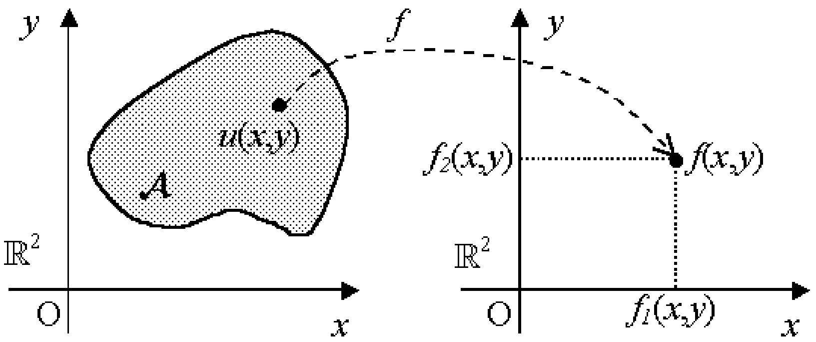
La surface $\mathcal{S}$ d'équation $z=f(x,y)$ permet de se représenter graphiquement l'application $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$.

Pour tout $u(x,y)$ de $\mathcal{A}$, la verticale en ce point rencontre la surface $\mathcal{S}$ en l'unique point $M(x,y,z{=}f(x,y))$.

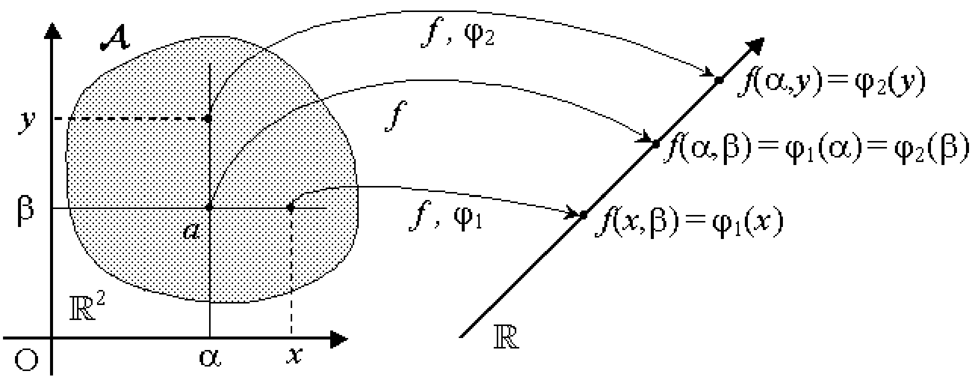


– *Applications composantes*
Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$.
A tout point $u=(x,y)$ de $\mathcal{A}$ elle associe un vecteur noté $f(u)$ ou encore $f(x,y)$.
Notons par exemple $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ les deux composantes de $f(x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$.
Avec ces notations, et pour tout $u=(x,y)$ de $\mathcal{A}$, on a $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$.
L'application $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}^2$ est donc caractérisée par les deux applications $\begin{cases} f_1:\mathcal{A}\to\mathbb{R}\\ f_2:\mathcal{A}\to\mathbb{R}\end{cases}$

On dit que f_1 et f_2 sont les *applications composantes* ou *applications coordonnées* de f.
Voici comment il peut être commode de se représenter le "fonctionnement" d'une application f de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$, et en particulier l'image d'un point $u(x,y)$ de $\mathcal{A}$.



– *Applications partielles en un point*
Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $a(\alpha,\beta)$ un point de $\mathcal{A}$.
  - ◇ Pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que (x,β) appartienne à $\mathcal{A}$, on pose $\varphi_1(x) = f(x,\beta)$.
    On dit que φ_1 est la *première application partielle* de f au point $a = (\alpha,\beta)$.
    On voit que φ_1 est définie en $x = \alpha$, et que $\varphi_1(\alpha) = f(a)$.
  - ◇ Pour tout y de $\mathbb{R}$ tel que (α,y) appartienne à $\mathcal{A}$, on pose $\varphi_2(y) = f(\alpha,y)$.
    On dit que φ_2 est la *deuxième application partielle* de f au point $a = (\alpha,\beta)$.
    On voit que φ_2 est définie en $y = \beta$, et que $\varphi_2(\beta) = f(a)$.
  - ◇ Supposons que le point a soit intérieur à $\mathcal{A}$.
    Il existe donc $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{A}$.
    Alors φ_1 est définie au moins sur $]\alpha - r, \alpha + r[$ et φ_2 est définie au moins sur $]\beta - r, \beta + r[$.
  - ◇ Le schéma ci-dessous illustre le "fonctionnement" des applications partielles φ_1 et φ_2 de f au point a, dans le cas où ce point est intérieur à $\mathcal{A}$.
    L'application φ_1 est une restriction de f à l'axe passant par a et parallèle à Ox, alors que φ_2 est une restriction de f à l'axe passant par a et parallèle à Oy.
    Comme on s'en doute, la donnée de φ_1 et de φ_2 ne permet pas de "reconstituer" f au voisinage de a, notamment en (x,y) avec $x \neq \alpha$ et $y \neq \beta$.



II.2 Limite en un point

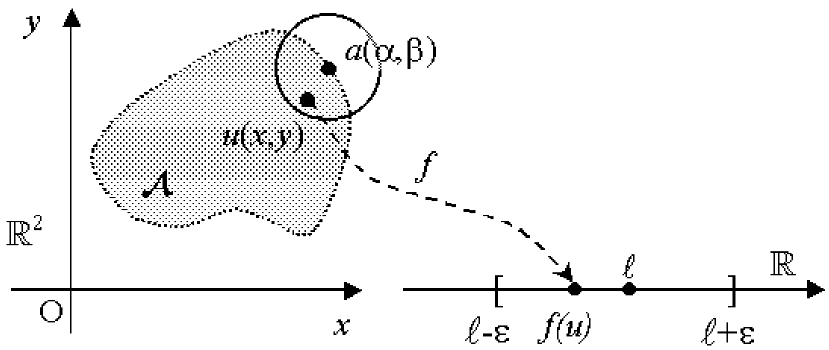
Définition *(Cas d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$)*

Soient $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une application, $a(\alpha, \beta)$ un point adhérent à $\mathcal{A}$, et ℓ un réel.
On dit que f admet ℓ pour limite au point a si :
$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ u \in \overline{\mathcal{B}}(a, \eta) \cap \mathcal{A} \Rightarrow |f(u) - \ell| \leq \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell$.

Voici une illustration de cette définition : pour tout $\varepsilon > 0$ (sous-entendu aussi petit soit-il), il existe $\eta > 0$ tel que tous les éléments u de $\mathcal{A}$ qui sont à une distance de a inférieure ou égale à η sont envoyés par f sur une image située à moins de ε de ℓ.

Le fait que a soit adhérent à $\mathcal{A}$ nous assure qu'il existe effectivement des points de $\mathcal{A}$ qui sont aussi près que l'on veut de a. Cela est évidemment le cas si a appartient lui-même à $\mathcal{A}$.

On a placé a sur la frontière de $\mathcal{A}$ parce que cette situation est plus "suggestive".



Remarques

– On peut étendre cette définition au cas d'une limite infinie (mais c'est peu utile en pratique).
  ◇ On écrira $\lim\limits_{u \to a} f(u) = +\infty$ si : $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \eta > 0,\ u \in \overline{\mathcal{B}}(a, \eta) \cap \mathcal{A} \Rightarrow f(u) \geq M$
  ◇ On écrira $\lim\limits_{u \to a} f(u) = -\infty$ si : $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \eta > 0,\ u \in \overline{\mathcal{B}}(a, \eta) \cap \mathcal{A} \Rightarrow f(u) \leq M$

– Si la limite de f en a existe, alors cette limite est unique.
  Si le point a est élément de $\mathcal{A}$, cette limite ne peut être que $f(a)$.

– L'existence et la valeur de $\lim\limits_{u \to a} f(u)$ ne dépendent pas de la norme utilisée dans $\mathbb{R}^2$.

– On a des propriétés analogues à celles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  f et g désignent ici deux applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ et a est un point adhérent à $\mathcal{A}$.
  ◇ Si $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell$ et $\lim\limits_{u \to a} g(u) = \ell'$ alors $\lim\limits_{u \to a} (\lambda f + \mu g)(u) = \lambda \ell + \mu \ell'$.
  ◇ Si $\lim\limits_{u \to a} f(u)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a (c'est-à-dire sur l'intersection de l'ensemble $\mathcal{A}$ et d'une boule de centre a.)
  ◇ Si $\lim\limits_{u \to a} f(u) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{u \to a} (fg)(u) = 0$
  ◇ Si $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell$ et $\lim\limits_{u \to a} g(u) = \ell'$ alors $\lim\limits_{u \to a} (fg)(u) = \ell \ell'$.
  ◇ Si $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_{u \to a} \dfrac{1}{f}(u) = \dfrac{1}{\ell}$.

Calculs effectifs de limites

– Si on cherche à calculer la limite de f en $a = (\alpha, \beta)$, il pourra être commode de poser $g(x, y) = f(\alpha + x, \beta + y)$ de manière à se ramener à un calcul de limite à l'origine.

– De même si on a l'intuition que $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell$, il sera souvent avantageux de considérer l'application $h : (x, y) \mapsto f(x, y) - \ell$ et de prouver que $\lim\limits_{u\to a} h(u) = 0$.

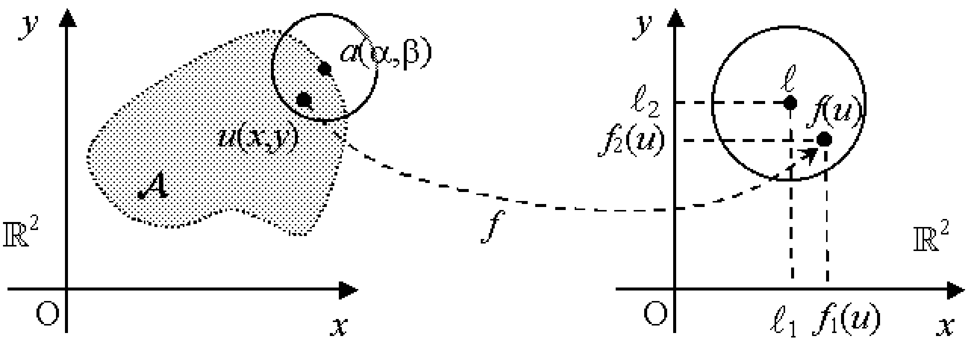
– Dans certains cas, il peut être commode d'utiliser les coordonnées polaires de centre a pour étudier la limite éventuelle de f au point a, ce qui revient à privilégier l'utilisation de la norme euclidienne.
On pose à cet effet $g(\rho, \theta) = f(\alpha + \rho\cos\theta, \beta + \rho\sin\theta)$, avec $\rho \geq 0$.
On a alors $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ 0 \leq \rho \leq \eta \Rightarrow |g(\rho, \theta) - \ell| \leq \varepsilon$.
Il est important que la majoration $|g(\rho, \theta) - \ell| \leq \varepsilon$ soit obtenue indépendamment de θ.

– Considérons par exemple $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
On veut calculer la limite de f en $(0, 0)$ (qui est bien un point adhérent à $\mathcal{A}$.)
Pour tout $\rho > 0$, on trouve $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^2\theta\cos\theta)$.
On en tire immédiatement $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho$.
Ainsi $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ tend vers 0 quand $\rho \to 0$, indépendamment de θ.
On en déduit que $\lim\limits_{u\to(0,0)} f(u) = 0$.
Sur cet exemple, on peut aussi utiliser la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$.
Il suffit d'écrire : $|x^2y + xy^2| \leq x^2\,|y| + y^2\,|x| \leq (x^2 + y^2)\,\|u\|_\infty$.
On en déduit alors $|f(u)| \leq \|u\|_\infty$, et donc $\lim\limits_{u\to(0,0)} f(u) = 0$.

Définition *(Cas d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^2$)*

Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $a(\alpha, \beta)$ un point adhérent à $\mathcal{A}$. Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f admet ℓ pour limite au point a si :
$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ u \in \overline{\mathcal{B}}(a, \eta) \cap \mathcal{A} \Rightarrow \|f(u) - \ell\| \leq \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell$.

Voici une illustration de cette définition : on a représenté la boule de centre ℓ et de rayon $\varepsilon > 0$, et la boule de centre a et de rayon $\eta > 0$ (on utilise visiblement la norme euclidienne $u \mapsto \|u\|_2$, mais on pourrait tout aussi bien utiliser la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$).



Remarques et propriétés

– Si $a \in \mathcal{A}$, la limite de f en a, si elle existe, est nécessairement égale à $f(a)$.

– Soient $f_1 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ les deux applications composantes de $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 les deux composantes du vecteur ℓ.
Alors $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell \Leftrightarrow \Big(\lim\limits_{u\to a} f_1(u) = \ell_1\Big)$ et $\Big(\lim\limits_{u\to a} f_2(u) = \ell_2\Big)$
Cette propriété, qu'illustre bien la figure ci-dessus, permet de ramener les calculs de limites au cas des fonctions à valeurs réelles.

– Soient f et g deux applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$ et soit a un point adhérent à $\mathcal{A}$.
  - ◇ Si $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell \in \mathbb{R}^2$ et $\lim\limits_{u\to a} g(u) = \ell' \in \mathbb{R}^2$ alors $\lim\limits_{u\to a}(\lambda f + \mu g)(u) = \lambda\ell + \mu\ell'$.
  - ◇ Si $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell \in \mathbb{R}^2$, alors f est bornée au voisinage de a.
  - ◇ Soit $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{u\to a} \varphi(u) = \lambda \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{u\to a} f(u) = \ell \in \mathbb{R}^2$, alors $\lim\limits_{u\to a}(\varphi f)(u) = \lambda\ell \in \mathbb{R}^2$.

Proposition *(caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite)*

Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).
Soit $a(\alpha, \beta)$ un point adhérent à $\mathcal{A}$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
◇ L'application f admet ℓ pour limite au point a.
◇ Pour toute suite (u_n) de $\mathcal{A}$ convergente vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Exemple

La propriété ci-dessus est surtout utile pour démontrer que f n'a pas de limite en a.

Il suffit par exemple de trouver deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathcal{A}$, convergentes vers a, telles que les suites de terme général $f(u_n)$ et $f(v_n)$ aient des limites différentes.

Considérons par exemple l'application $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, définie sur $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Considérons les suites (u_n) et (v_n), avec $u_n = \Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big)$ et $v_n = \Big(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\Big)$.

Ces deux suites convergent vers $(0, 0)$, mais $f(u_n) = \frac{1}{2}$ et $f(v_n) = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que l'application f n'a pas de limite au point $(0, 0)$.

II.3 Continuité en un point

Proposition

Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Soit $a(\alpha, \beta)$ un point de $\mathcal{A}$.
On dit que f est *continue* en a si elle a une limite en a, c'est-à-dire si $\lim\limits_{u\to a} f(u) = f(a)$.
Cela équivaut à $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ u \in \overline{\mathcal{B}}(a, \eta) \cap \mathcal{A} \Rightarrow \|f(u) - f(a)\| \le \varepsilon$.
(Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on écrit $|f(u) - f(a)| \le \varepsilon$ plutôt que $\|f(u) - f(a)\| \le \varepsilon$)

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

Soit f une application définie sur $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Soit a un point de $\mathcal{A}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ◇ L'application f est continue au point a.
- ◇ Pour toute suite (u_n) de $\mathcal{A}$ convergente vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Proposition *(Continuité et applications composantes)*

Soient $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$, et f_1, f_2 ses deux applications composantes de f. Soit a un point de $\mathcal{A}$.
Alors f est continue en a si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en a.

Proposition *(Continuité et applications partielles)*

Soit f une application définie sur $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Soient φ_1 et φ_2 les deux applications partielles de f au point a de $\mathcal{A}$.
Si f est continue en a, alors φ_1 et φ_2 sont continues en a.

Deux exemples importants

– La réciproque de la propriété précédente est fausse.
On peut s'en convaincre avec l'exemple suivant :
Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on pose $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. On pose $f(0,0) = 0$.
Les applications partielles de f en $(0,0)$ sont nulles sur $\mathbb{R}$, donc continues en $(0,0)$.
Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$.
On constate en effet que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.
Cet exemple illustre bien le fait que la connaissance des deux applications partielles de f en un point a ne renseigne pas complètement sur le comportement de f en ce point.

– Posons $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
Les applications partielles de f en $(0,0)$ sont nulles sur $\mathbb{R}$, donc continues en $(0,0)$.
On va prouver que l'application f n'est pas continue en $(0,0)$.
On a tout d'abord $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = f(0,0)$.
La suite utilisée dans l'exemple précédent ne permet donc pas de conclure.
Plus généralement, pour tout $t \neq 0$, $f\left(\frac{1}{n}, \frac{t}{n}\right) = \frac{nt^2}{n^2+t^4}$. Là encore $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{t}{n}\right) = f(0,0)$.
De façon imagée, il y a continuité partielle en $(0,0)$ dans toutes les directions.
Pour comprendre pourquoi f n'est pas continue en $(0,0)$, il faut utiliser une suite (x_n, y_n) convergeant vers 0, mais pas selon une "direction rectiligne".
Avec $y_n = \frac{1}{n}$ et $x_n = \frac{1}{n^2}$, on a $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$, qui ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ quand $n \to \infty$.
Conclusion : l'application f n'est pas continue en $(0,0)$, bien que sa restriction à toute droite passant par $(0,0)$ soit continue en ce point !

Proposition *(Opérations sur les applications continues)*

Soient f, g deux applications définies sur $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, continues en un point a de $\mathcal{A}$.

- On suppose que f, g sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R}^2$.)
  Pour tous scalaires λ et μ, l'application $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- Si f et g sont à valeurs réelles alors fg est continue en a.
  Cela reste vrai si l'une est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'autre à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- On suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, et que g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $g(a) \neq 0$.
  Dans ces conditions, l'application $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition *(Composition d'applications continues)*

Soit f une application définie sur $\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
Soit g une application définie sur $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
On suppose que $f(\mathcal{A})$ est inclus dans $\mathcal{B}$. De cette manière, $g \circ f$ est définie sur $\mathcal{A}$.
Si f est continue en $a \in \mathcal{A}$ et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

II.4 Continuité sur un domaine

Définition

Soit f une application définie sur $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est continue sur l'ensemble $\mathcal{A}$ si f est continue en tout point de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$) l'ensemble des applications continues de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

Proposition

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Soient f, g deux applications continues de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour tous scalaires λ, μ, l'application $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathcal{A}$.
  Ainsi toute combinaison linéaire d'applications continues sur $\mathcal{A}$ est continue sur $\mathcal{A}$.
- L'application fg est continue sur $\mathcal{A}$.
  Plus généralement tout produit d'applications continues sur $\mathcal{A}$ est continue sur $\mathcal{A}$.
- Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{A}$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathcal{A}$.

Remarques et propriétés

- Toute application constante de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$) est continue sur $\mathcal{A}$.
- Les résultats précédents montrent que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ de toutes les applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.
- Les applications coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
  Les applications polynômiales $(x, y) \mapsto P(x, y) = \sum \lambda_{m,n} x^m y^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
  Les applications rationnelles $(x, y) \mapsto R(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ sont continues sur leur domaine.
- L'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathbb{R}^2)$

Proposition *(Image réciproque d'un ouvert ou fermé par une application continue)*

Soit f une une application continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$.

- ⋄ L'image réciproque par f d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert.
- ⋄ L'image réciproque par f d'un ensemble fermé est un ensemble fermé.
- ⋄ En particulier, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si α est un nombre réel :
  Les ensembles $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)<\alpha\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)>\alpha\}$ sont ouverts.
  Les ensembles $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)\le\alpha\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)\ge\alpha\}$ sont fermés.

II.5 Continuité uniforme, applications lispchitziennes

Définition *(Applications uniformément continues)*

Soient $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, et f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est *uniformément continue* sur $\mathcal{A}$ si :
$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ \forall\,(u,v)\in\mathcal{A}^2,\ \|u-v\|\le\eta\Rightarrow\|f(u)-f(v)\|\le\varepsilon.$
(Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on écrit $|f(u)-f(v)|\le\varepsilon$ plutôt que $\|f(u)-f(v)\|\le\varepsilon$)

Remarques

- La notion d'application uniformément continue n'est pas explicitement au programme.
- Si f est uniformément continue sur $\mathcal{A}$, alors f est continue sur $\mathcal{A}$. La réciproque est fausse.
  Par exemple $(x,y)\mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas uniformément continue.

Proposition *(Théorème de Heine)*

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, fermée et bornée (donc un compact).
Soit f une application continue sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Alors f est uniformément continue sur $\mathcal{A}$.

Proposition *(Application continue sur un compact)*

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, fermée et bornée (donc un compact).
Soit $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ une application continue (donc uniformément continue)
Alors f est bornée sur $\mathcal{A}$, et atteint ses bornes.
Autrement dit, il existe u_0 et u_1 dans $\mathcal{A}$ tels que $\begin{cases} f(u_0)=\min\{f(u),u\in\mathcal{A}\}\\ f(u_1)=\max\{f(u),u\in\mathcal{A}\}\end{cases}$

Définition *(Applications lipschitziennes)*

Soient $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, et f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Soit k un réel strictement positif. On dit que f est *k-lipschitzienne* sur $\mathcal{A}$ si :
$\forall\,(u,v)\in\mathcal{A}^2,\ \|f(u)-f(v)\|\le k\,\|u-v\|.$

Remarques et propriétés

– Si f est à valeurs réelles, on écrira $|f(u)-f(v)| \leq k\,\|u-v\|$.

– Si f est k-lipschitzienne, alors pour tout réel $k' > k$, l'application f est k'-lipschitzienne.
Quand on dit que f est k-lipschitzienne, cela ne signifie pas que k soit le meilleur coefficient possible. L'ensemble des coefficients possibles a une borne inférieure $\alpha \geq 0$ (qui peut éventuellement être un minimum) et est de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$. La recherche de α est sans grand intérêt, sauf si on veut majorer $\|f(u)-f(v)\|$ "au mieux".

– Le caractère lipschitzien ou non d'une application f ne dépend pas des normes utilisées.
En revanche, le coefficient k qui figure dans la définition dépend de ces normes (mais c'est sans grande importance : ce qui compte c'est que f soit lipschitzienne.)
On sait par exemple que pour tout u de $\mathbb{R}^2$ on a $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|u\|_\infty$.
Supposons que $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ soit k-lipschitzienne pour la norme $u \mapsto \|u\|_2$.
L'égalité $\|f(u)-f(v)\|_2 \leq k\,\|u-v\|_2$ implique $\|f(u)-f(v)\|_\infty \leq k\sqrt{2}\,\|u-v\|_\infty$.
L'application f est donc $(k\sqrt{2})$-lipschitzienne pour la norme $u \mapsto \|u\|_\infty$.

– Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$, et soient f_1, f_2 ses applications composantes.
Alors f est lipschitzienne $\Leftrightarrow$ f_1 et f_2 sont lipschitziennes.

– Soit f une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
Soient φ_1, φ_2 les applications partielles de f en un point a de $\mathcal{A}$.
Si f est lipschitzienne, alors φ_1 et φ_2 sont lipschitziennes.

– Réciproquement, on suppose que $\mathcal{A}$ est le produit cartésien $I \times J$ de deux intervalles.
Supposons que toutes les premières applications partielles de f sont k_1-lipschitziennes sur I.
Supposons que toutes les secondes applications partielles de f sont k_2-lipschitziennes sur J.
Alors f est (k_1+k_2)-lipschitzienne sur $I \times J$.