Table des matières

Propriétés métriques des arcs du plan

1. Rectification d'un arc du plan

Définition *(Ligne polygonale inscrite dans un arc)*

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré continu du plan.

Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.

On dit que $M(t_0), M(t_1), \ldots, M(t_n)$ forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc (I, f).

La quantité $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$ est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

Définition *(Arc rectifiable)*

On dit que l'arc paramétré $(I = [a, b], f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.

On appelle alors *longueur* de cet arc la quantité $L = \sup(L_\sigma)$, le "sup" étant pris sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans (I, f).

Proposition

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré du plan, de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à : $L = \displaystyle\int_a^b \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t$.

Invariance par changement de paramétrage

Soit $(I = [a, b], f)$ et $(J = [c, d], g)$ deux paramétrages admissibles du même arc de classe $\mathcal{C}^1$.

Il existe donc un difféomorphisme φ de J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $g = f \circ \varphi$.

Supposons par exemple que φ soit croissante (donc $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$) :

Alors $\displaystyle\int_c^d \| g'(u) \| \,\mathrm{d}u = \int_c^d \| f'(\varphi(u)) \| \,\varphi'(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t$.

De la même manière, si φ est décroissante (donc $\varphi(c) = b$ et $\varphi(d) = a$) :

Alors $\displaystyle\int_c^d \| g'(u) \| \,\mathrm{d}u = -\int_c^d \| f'(\varphi(u)) \| \,\varphi'(u) \,\mathrm{d}u = -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t$.

Les arcs (I, f) et (J, g) ont donc la même longueur, ce qui est rassurant et montre que la longueur d'un arc paramétré est en fait une notion géométrique : on pourra donc parler de la longueur du support de l'arc, indépendamment de la représentation paramétrique utilisée.

Cas particuliers

– La longueur de l'arc $t \in [a, b] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \,\mathrm{d}t$.

– On considère l'arc de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $y = f(x)$, avec $a \le x \le b$.

On a $M(x) = (x, f(x))$ donc $M'(x) = (1, f'(x))$: la longueur de l'arc est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \,\mathrm{d}x$.