



# Table des matières

I	Orientation, produit mixte, produit vectoriel . . . . .	2
I.1	Orientation d'un espace euclidien . . . . .	2
I.2	Produit mixte dans un espace euclidien orienté . . . . .	3
I.3	Produit vectoriel dans l'espace orienté de dimension 3 . . . . .	4
II	Sous-espaces affines et orthogonalité . . . . .	5
III	Angles et isométries en dimension 3 . . . . .	8
III.1	Angles en dimension 3 . . . . .	8
III.2	Isométries affines . . . . .	9
III.3	Classification des isométries affines en dimension 3 . . . . .	11
IV	Sphères dans l'espace . . . . .	15



Dans ce chapitre,  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  pour son produit scalaire usuel.

## I Orientation, produit mixte, produit vectoriel

### I.1 Orientation d'un espace euclidien

**Proposition** (*Orientation d'un espace vectoriel*)

- Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .  
Si  $\det P > 0$ , on dit que la base  $\mathcal{B}'$  a la *même orientation* que la base  $\mathcal{B}$ .  
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$ .  
Pour cette relation, il y a exactement deux classes d'équivalence.  
Orienter  $E$ , c'est choisir l'une de ces deux classes.
- ◇ Les bases de la classe d'équivalence choisie sont dites *directes*.
  - ◇ Les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites *indirectes*.

#### Remarques

- Dans la pratique, on oriente l'espace  $E = \mathbb{R}^3$  en considérant que la base canonique est directe.
- Si la base  $\mathcal{B}'$  se déduit de  $\mathcal{B}$  par une permutation  $\sigma$  sur les vecteurs de  $\mathcal{B}$ , les deux bases ont même orientation si  $\sigma$  est paire, et une orientation contraire sinon. Si  $\mathcal{B}'$  se déduit de  $\mathcal{B}$  en changeant un vecteur en son opposé, elles sont d'orientation contraire.
- Ainsi, si  $(u, v, w)$  est une base directe de  $E$ , alors
  - ◇ Les bases  $(-u, v, w)$ ,  $(u, -v, w)$ ,  $(u, v, -w)$  et  $(-u, -v, -w)$  sont indirectes.  
Les bases  $(v, u, w)$ ,  $(w, v, u)$ ,  $(u, w, v)$  sont indirectes, etc.
  - ◇ Les bases  $(u, v, w)$ ,  $(u, -v, -w)$ ,  $(-u, v, -w)$ , et  $(-u, -v, w)$  sont directes.  
Les bases  $(v, w, u)$ ,  $(w, u, v)$  sont directes, etc.
- Dans  $E$ , il y a des bases orthonormales directes et des bases orthonormales indirectes.  
En effet, si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est orthonormale,  $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, e_3)$  est d'orientation contraire.
- Un repère cartésien  $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$  est dit direct ou indirect suivant que la base  $(e)$  est directe ou indirecte. Il est dit orthonormé si la base  $(e)$  est orthonormée.  
Il existe donc des repères orthonormés directs ou indirects.

#### Orientation d'un plan par une orientation de sa normale

- Soit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  une base orthonormale d'un plan  $P$ . Soit  $D = P^\perp$  la normale à ce plan.  
Il existe un unique vecteur unitaire  $\varepsilon_3$  de  $D$  tel que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  soit orthonormée directe.
- Si on oriente  $D$  par  $\varepsilon_3$  unitaire (deux possibilités), on définit une orientation de  $P$  en disant qu'une base orthonormale  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  de  $P$  est directe si  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  est directe dans  $E$ .  
Si on inverse l'orientation de  $D$  (en choisissant le vecteur  $-\varepsilon_3$  plutôt que  $\varepsilon_3$ ), alors l'orientation du plan  $P$  s'en trouve inversée.

- Ce qui précède peut s'étendre à un plan affine  $\mathcal{P}$  et à une normale  $\mathcal{D}$  à ce plan.

La droite  $\mathcal{D}$  est la normale en  $\Omega$  au plan affine  $\mathcal{P}$ .

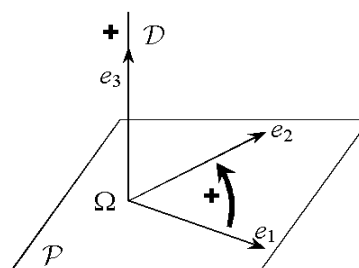
On oriente  $\mathcal{D}$  par le choix du vecteur unitaire  $e_3$ .

Il en découle une orientation positive du plan  $\mathcal{P}$ .

Le repère orthonormal  $(\Omega, e_1, e_2)$  est direct

dans le plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si le repère

orthonormal  $(\Omega, e_1, e_2, e_3)$  est direct dans  $E$ .



## I.2 Produit mixte dans un espace euclidien orienté

### Proposition (Produit mixte)

Soit  $u_1, u_2, u_3$  une famille de trois vecteurs de  $E = \mathbb{R}^3$  orienté.

Le déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$  est le même dans toute base orthonormale directe  $\mathcal{B}$ .

Cette valeur est appelée *produit mixte* de  $u_1, u_2, u_3$  et elle est notée  $[u_1, u_2, u_3]$ .

### Propriétés

- Si on inverse l'orientation de  $E$ , les produits mixtes sont changés en leur opposé.
- Si  $e_1, e_2, e_3$  est orthonormale directe (resp indirecte) alors  $[e_1, e_2, e_3] = 1$  (resp  $-1$ ).
- Soit  $u_1, u_2, u_3$  une base de  $E$ . On a bien sûr  $[u_1, u_2, u_3] \neq 0$ .  
Plus précisément :  $[u_1, u_2, u_3] > 0 \Leftrightarrow$  la base  $u_1, u_2, u_3$  est directe.
- On a toujours l'inégalité  $\left| [u_1, u_2, u_3] \right| \leq \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\|$ .  
Si  $u_1, u_2, u_3$  sont libres, c'est une égalité  $\Leftrightarrow$  les  $u_k$  sont orthogonaux deux à deux.
- Soit  $u_1, u_2, u_3$  dans  $E$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $[f(u_1), f(u_2), f(u_3)] = (\det f)[u_1, u_2, u_3]$ .

### Interprétation géométrique (volume d'un parallélépipède)

- Dans  $E_3$  on se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de  $A$  sont  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ .

Son volume est  $\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$ . Celui du tétraèdre  $ABCD$  est  $\frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$ .

On a représenté ci-dessous le parallélépipède.

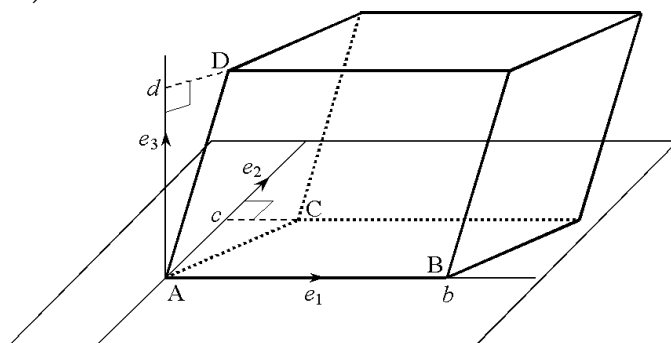
Ici la base  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  est directe, donc le produit mixte  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$  est positif.

Le procédé de Schmidt transforme  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  en une base orthonormale directe  $e_1, e_2, e_3$ .

On peut alors écrire  $\overrightarrow{AB} = b e_1$ ,  $\overrightarrow{AC} = c e_1 + c e_2$ ,  $\overrightarrow{AD} = d e_1 + d e_2 + d e_3$ .

Alors  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \text{Det}_{(e)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = bcd$  : c'est bien le volume du parallélépipède.

En effet, le réel  $bc$  représente l'aire du parallélogramme de base, et  $d$  est la hauteur du parallélépipède.



### I.3 Produit vectoriel dans l'espace orienté de dimension 3

On rappelle que  $E = \mathbb{R}^3$  est muni de sa structure d'euclidien orienté canonique.

**Proposition** (*Produit vectoriel*)

Soient  $u, v$  deux vecteurs de  $E$ .

Il existe un unique vecteur  $a$  tel que :  $\forall w \in E, [u, v, w] = (a | w)$ .

Ce vecteur  $a$  est appelé *produit vectoriel* de  $u$  par  $v$ , et il est noté  $u \wedge v$ .

On a donc l'égalité, pour tous vecteurs  $u, v$  de  $E$  :  $[u, v, w] = ((u \wedge v) | w)$ .

**Remarques et propriétés**

– Le produit vectoriel de deux vecteurs  $u, v$  est parfois noté  $u \times v$ .

– L'application  $(u, v) \mapsto u \wedge v$  est bilinéaire.

Elle est alternée (antisymétrique) :  $\forall (u, v) \in E^2, u \wedge v = -v \wedge u$ .

Pour tous vecteurs  $u, v, w$ , on peut écrire :  $[u, v, w] = ((u \wedge v) | w) = (u | (v \wedge w))$ .

– Pour tous vecteurs  $u, v$  de  $E$ , le vecteur  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et à  $v$ .

On a :  $u \wedge v = \vec{0} \Leftrightarrow u, v$  sont liés.

Si  $u, v$  sont libres, alors la famille  $u, v, u \wedge v$  est une base directe.

– Supposons que les deux vecteurs  $u, v$  soient unitaires et orthogonaux.

Alors  $w = u \wedge v$  est l'unique vecteur tel que  $u, v, w$  soit orthonormale directe.

Si  $i, j, k$  est orthonormale directe on a : 
$$\begin{cases} i \wedge j = k & j \wedge k = i & k \wedge i = j \\ j \wedge i = -k & k \wedge j = -i & i \wedge k = -j \end{cases}$$

– On suppose que  $E$  est muni d'une base orthonormale directe  $i, j, k$ .

Soit  $u = xi + yj + zk$  et  $v = x'i + y'j + z'k$ .

Alors le produit vectoriel  $u \wedge v$  se calcule en écrivant : 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

– Soient  $u, v$  deux vecteurs de  $E$ .

On a l'égalité :  $(u | v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ .

En particulier  $\|u \wedge v\| \leq \|u\| \|v\|$  (avec égalité  $\Leftrightarrow (u | v) = 0$ .)

– L'aire du parallélogramme  $ABDC$  est  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ .

Celle du triangle  $ABC$  est  $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

– *Distance d'un point à une droite*

Soit  $\mathcal{D}$  la droite affine passant  $\Omega$  et dirigée par  $u$ .

Soit  $M$  un point de  $E$ . La distance de  $M$  à  $\mathcal{D}$  est  $d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{\Omega M} \wedge u\|}{\|u\|}$ .

**Proposition** *Formule du double produit vectoriel*

|| Pour tous vecteurs  $u, v, w$ , on a :  $u \wedge (v \wedge w) = (u | w)v - (u | v)w$ .

**Proposition** *Problème de la division vectorielle*

Soient  $a, b$  dans  $E$  ( $a \neq \vec{0}$ ); on cherche les vecteurs  $u$  de  $E$  tels que  $a \wedge u = b$ .  
 Si  $(a | b) \neq 0$ , il n'y a pas de solution, sinon on obtient les  $u = u_0 + \lambda a$ , avec  $u_0 = \frac{1}{\|a\|^2} b \wedge a$ .

Illustrons le problème de la division vectorielle.

Ici les deux vecteurs  $a$  et  $b$  sont orthogonaux.

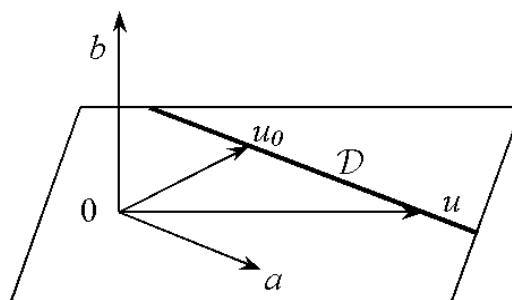
On cherche les vecteurs  $u$  tels que  $a \wedge u = b$ .

Les solutions  $u$  sont forcément orthogonales à  $b$ .

$u_0$  est la seule solution qui soit orthogonale à  $a$ .

Les autres solutions forment la droite affine  $\mathcal{D}$

passant par  $u_0$  et dirigée par  $a$ .



## II Sous-espaces affines et orthogonalité

On rappelle que  $E = \mathbb{R}^3$  est muni de sa structure d'eulidien orienté canonique.

**Définition** (*Sous-espaces affines orthogonaux*)

Deux sous-espaces affines de  $E$  sont dits orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

**Remarques**

- Soit  $\mathcal{D}$  une droite affine dirigée par  $u$ , et  $\mathcal{P}$  un plan affine de direction engendrée par  $v, w$ .  
 Alors  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux  $\Leftrightarrow (u | v) = (u | w) = 0$ .
- Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites affines, dirigée respectivement par  $u_1$  et par  $u_2$ .  
 Alors  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont orthogonales  $\Leftrightarrow (u_1 | u_2) = 0$ .
- Au sens de la définition, on ne peut jamais dire de deux plans affines qu'ils sont orthogonaux.
- Normales à un plan affine

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine de direction  $P$ .  $P^\perp$  est une droite vectorielle  $D$ . On dit que  $D$  est la normale au plan vectoriel  $P$ , et qu'une droite affine  $\mathcal{D}$  de direction  $D$  est une normale au plan affine  $\mathcal{P}$ . On dit qu'un vecteur directeur  $a$  de  $D$  est un vecteur normal à  $P$ , ou à  $\mathcal{P}$ .

## – Équations de plans

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine de direction  $P$ . Soit  $(e) = e_1, e_2, e_3$  une base orthonormale.

On se donne un vecteur  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  non nul.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ◇ Le vecteur  $a$  est normal à l'hyperplan  $H$ .
- ◇ Une équation de  $P$  est  $(a | u) = 0$ , c'est-à-dire  $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ .
- ◇ Une équation de  $\mathcal{P}$  est  $(a | u) = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) c'est-à-dire  $a_1x + a_2y + a_3z = \lambda$ .

## – Exemples

On se place dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3, muni d'une base orthonormale.

◇ La normale au plan vectoriel d'équation  $2x + 5y - 3z = 0$  est dirigée par  $a = (2, 5, -3)$ .

◇ Soit  $\mathcal{P}$  le plan affine orthogonal au vecteur  $a = (1, 3, -2)$  et passant par  $\Omega(4, -5, -7)$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation  $(x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 7) = 0$ , donc  $x + 3y - 2z = 3$ .

### Plans perpendiculaires

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans affines de  $E$ , de directions  $P_1$  et  $P_2$ .

On dit que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont *perpendiculaires* si  $P_1^\perp \subset P_2$ , c'est-à-dire si  $P_2^\perp \subset P_1$ .

Cela signifie que l'un des plans contient une normale à l'autre.

Cela équivaut aussi à dire que leurs normales sont des droites orthogonales.

Supposons que les équations de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  soient 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = \lambda_2 \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires  $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ .

On a représenté ici deux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

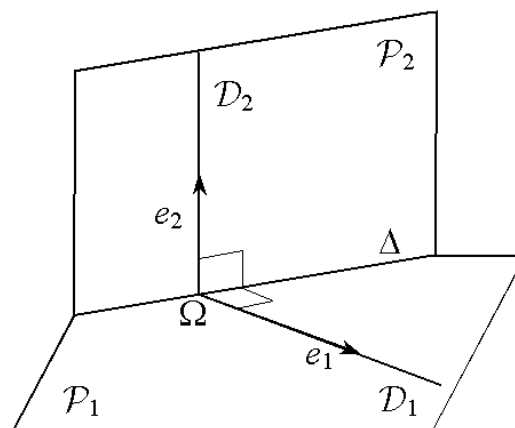
Ces plans se coupent suivant une droite  $\Delta$ .

Soit  $\Omega$  un point de la droite  $\Delta$ .

Puisque la droite  $\mathcal{D}_1$  passant par  $\Omega$  et orthogonale à  $\mathcal{P}_2$  est dans  $\mathcal{P}_1$ ,

Les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.

De même, la droite  $\mathcal{D}_2$  passant par  $\Omega$  et orthogonale à  $\mathcal{P}_1$  est dans  $\mathcal{P}_2$ .



### Définition (Projection orthogonale sur un sous-espace affine)

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de direction  $F$ .

La projection  $p_{\mathcal{F}}$  sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $F^\perp$  est appelée *projection affine orthogonale* sur  $\mathcal{F}$ .

### Proposition (Distance d'un point à un sous-espace affine)

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine, de direction  $F$ . Soit  $M$  un point de  $E$ .

On appelle *distance* de  $M$  à  $\mathcal{F}$  le réel  $d(M, \mathcal{F}) = \inf \{d(M, \Omega), \Omega \in \mathcal{F}\}$ .

Cette borne inférieure est un minimum, atteint uniquement pour  $H = p_{\mathcal{F}}(M)$ .

La projection orthogonale  $H$  de  $M$  sur  $\mathcal{F}$  est donc le point de  $\mathcal{F}$  le plus "proche" de  $M$ .

Pour tout point  $\Omega$  de  $\mathcal{F}$ , on a :  $\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega H}\|^2 + d(M, \mathcal{F})^2$ .

On a représenté la projection  $H$  de  $M$  sur le sous-espace affine  $\mathcal{F}$  de direction  $F$ .

Pour tout  $\Omega$  de  $\mathcal{F}$ , on a  $\|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2$ .

On voit en effet que le triangle  $MH\Omega$  est rectangle en  $H$ .

