Table des matières

Dans ce chapitre, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ pour son produit scalaire usuel.

I Orientation, produit mixte, produit vectoriel

I.1 Orientation d'un espace euclidien

Proposition *(Orientation d'un espace vectoriel)*

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Si $\det P > 0$, on dit que la base $\mathcal{B}'$ a la *même orientation* que la base $\mathcal{B}$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.
Pour cette relation, il y a exactement deux classes d'équivalence.
Orienter E, c'est choisir l'une de ces deux classes.

- Les bases de la classe d'équivalence choisie sont dites *directes*.
- Les bases de l'autre classe d'équivalence sont dites *indirectes*.

Remarques

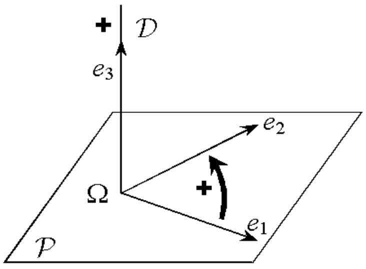
- Dans la pratique, on oriente l'espace $E = \mathbb{R}^3$ en considérant que la base canonique est directe.
- Si la base $\mathcal{B}'$ se déduit de $\mathcal{B}$ par une permutation σ sur les vecteurs de $\mathcal{B}$, les deux bases ont même orientation si σ est paire, et une orientation contraire sinon. Si $\mathcal{B}'$ se déduit de $\mathcal{B}$ en changeant un vecteur en son opposé, elles sont d'orientation contraire.
- Ainsi, si (u, v, w) est une base directe de E, alors
  - Les bases $(-u, v, w)$, $(u, -v, w)$, $(u, v, -w)$ et $(-u, -v, -w)$ sont indirectes.
    Les bases (v, u, w), (w, v, u), (u, w, v) sont indirectes, etc.
  - Les bases (u, v, w), $(u, -v, -w)$, $(-u, v, -w)$, et $(-u, -v, w)$ sont directes.
    Les bases (v, w, u), (w, u, v) sont directes, etc.
- Dans E, il y a des bases orthonormales directes et des bases orthonormales indirectes.
  En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormale, $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, e_3)$ est d'orientation contraire.
- Un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$ est dit direct ou indirect suivant que la base (e) est directe ou indirecte. Il est dit orthonormé si la base (e) est orthonormée.
  Il existe donc des repères orthonormés directs ou indirects.

Orientation d'un plan par une orientation de sa normale

- Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ une base orthonormale d'un plan P. Soit $D = P^{\perp}$ la normale à ce plan.
  Il existe un unique vecteur unitaire ε_3 de $D =$ tel que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ soit orthonormée directe.
- Si on oriente D par e_3 unitaire (deux possibilités), on définit une orientation de P en disant qu'une base orthonormale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de P est directe si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ est directe dans E.

  Si on inverse l'orientation de D (en choisissant le vecteur $-e_3$ plutôt que e_3), alors l'orientation du plan P s'en trouve inversée.

– Ce qui précède peut s'étendre à un plan affine $\mathcal{P}$ et à une normale $\mathcal{D}$ à ce plan.
La droite $\mathcal{D}$ est la normale en Ω au plan affine $\mathcal{P}$.
On oriente $\mathcal{D}$ par le choix du vecteur unitaire e_3.
Il en découle une orientation positive du plan $\mathcal{P}$.
Le repère orthonormal (Ω, e_1, e_2) est direct dans le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le repère orthonormal (Ω, e_1, e_2, e_3) est direct dans E.



I.2 Produit mixte dans un espace euclidien orienté

Proposition *(Produit mixte)*

Soit u_1, u_2, u_3 une famille de trois vecteurs de $E = \mathbb{R}^3$ orienté.
Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ est le même dans toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$.
Cette valeur est appelée *produit mixte* de u_1, u_2, u_3 et elle est notée $[u_1, u_2, u_3]$.

Propriétés

– Si on inverse l'orientation de E, les produits mixtes sont changés en leur opposé.

– Si e_1, e_2, e_3 est orthonormale directe (resp indirecte) alors $[e_1, e_2, e_3] = 1$ (resp -1).

– Soit u_1, u_2, u_3 une base de E. On a bien sûr $[u_1, u_2, u_3] \neq 0$.
Plus précisément : $[u_1, u_2, u_3] > 0 \Leftrightarrow$ la base u_1, u_2, u_3 est directe.

– On a toujours l'inégalité $\Big|[u_1, u_2, u_3]\Big| \le \|u_1\|\,\|u_2\|\,\|u_3\|$.
Si u_1, u_2, u_3 sont libres, c'est une égalité $\Leftrightarrow$ les u_k sont orthogonaux deux à deux.

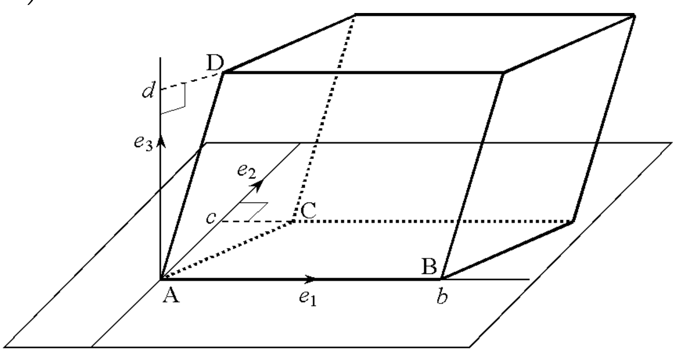
– Soit u_1, u_2, u_3 dans E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $[f(u_1), f(u_2), f(u_3)] = (\det f)[u_1, u_2, u_3]$.

Interprétation géométrique (volume d'un parallélépipède)

– Dans E_3 on se donne un parallélépipède dont les arêtes issues de A sont AB, AC, AD.
Son volume est $\Big|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\Big|$. Celui du tétraèdre $ABCD$ est $\frac{1}{6}\Big|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\Big|$.

On a représenté ci-dessous le parallélépipède.
Ici la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ est directe, donc le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$ est positif.
Le procédé de Schmidt transforme $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ en une base orthonormale directe e_1, e_2, e_3.
On peut alors écrire $\overrightarrow{AB} = be_1,\ \overrightarrow{AC} = c'e_1 + ce_2,\ \overrightarrow{AD} = d''e_1 + d'e_2 + de_3$.
Alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \mathrm{Det}_{(e)}\Big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\Big) = bcd$: c'est bien le volume du parallélépipède.

En effet, le réel bc représente l'aire du parallélogramme de base, et d est la hauteur du parallélépipède.



I.3 Produit vectoriel dans l'espace orienté de dimension 3

On rappelle que $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure d'euclidien orienté canonique.

Proposition *(Produit vectoriel)*

Soient u, v deux vecteurs de E.
Il existe un unique vecteur a tel que : $\forall\, w \in E,\ [u, v, w] = (a \mid w)$.
Ce vecteur a est appelé *produit vectoriel* de u par v, et il est noté $u \wedge v$.
On a donc l'égalité, pour tous vecteurs u, v de E : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w)$.

Remarques et propriétés

- Le produit vectoriel de deux vecteurs u, v est parfois noté $u \times v$.
- L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire.
  Elle est alternée (antisymétrique) : $\forall\, (u, v) \in E^2,\ u \wedge v = -v \wedge u$.
  Pour tous vecteurs u, v, w, on peut écrire : $[u, v, w] = ((u \wedge v) \mid w) = (u \mid (v \wedge w))$.
- Pour tous vecteurs u, v de E, le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
  On a : $u \wedge v = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u, v$ sont liés.
  Si u, v sont libres, alors la famille $u, v, u \wedge v$ est une base directe.
- Supposons que les deux vecteurs u, v soient unitaires et orthogonaux.
  Alors $w = u \wedge v$ est l'unique vecteur tel que u, v, w soit orthonormale directe.
  Si i, j, k est orthonormale directe on a : $\begin{cases} i \wedge j = k & j \wedge k = i & k \wedge i = j \\ j \wedge i = -k & k \wedge j = -i & i \wedge k = -j \end{cases}$
- On suppose que E est muni d'une base orthonormale directe i, j, k.
  Soit $u = xi + yj + zk$ et $v = x'i + y'j + z'k$.
  Alors le produit vectoriel $u \wedge v$ se calcule en écrivant : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$
- Soient u, v deux vecteurs de E.
  On a l'égalité : $(u \mid v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\ \|v\|^2$.
  En particulier $\|u \wedge v\| \le \|u\|\ \|v\|$ (avec égalité $\Leftrightarrow (u \mid v) = 0$.)
- L'aire du parallélogramme $ABDC$ est $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
  Celle du triangle ABC est $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$
- *Distance d'un point à une droite*
  Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant Ω et dirigée par u.
  Soit M un point de E. La distance de M à $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\|\,\overrightarrow{\Omega M} \wedge u\,\|}{\|u\|}$.

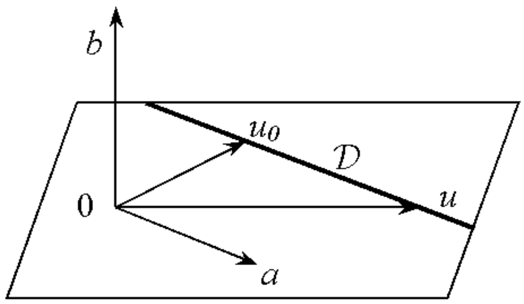
Proposition *Formule du double produit vectoriel*

Pour tous vecteurs u, v, w, on a : $u \wedge (v \wedge w) = (u \mid w)\, v - (u \mid v)\, w$.

Proposition *Problème de la division vectorielle*

Soient a, b dans E $(a \neq \overrightarrow{0})$; on cherche les vecteurs u de E tels que $a \wedge u = b$.
Si $(a \mid b) \neq 0$, il n'y a pas de solution, sinon on obtient les $u = u_0 + \lambda a$, avec $u_0 = \dfrac{1}{\|a\|^2}\, b \wedge a$.

Illustrons le problème de la division vectorielle.
Ici les deux vecteurs a et b sont orthogonaux.
On cherche les vecteurs u tels que $a \wedge u = b$.
Les solutions u sont forcément orthogonales à b.
u_0 est la seule solution qui soit orthogonale à a.
Les autres solutions forment la droite affine $\mathcal{D}$ passant par u_0 et dirigée par a.



II Sous-espaces affines et orthogonalité

On rappelle que $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure d'euclidien orienté canonique.

Définition *(Sous-espaces affines orthogonaux)*

Deux sous-espaces affines de E sont dits orthogonaux si leurs directions sont orthogonales.

Remarques

– Soit $\mathcal{D}$ une droite affine dirigée par u, et $\mathcal{P}$ un plan affine de direction engendrée par v, w.
Alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (u \mid v) = (u \mid w) = 0$.

– Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines, dirigée respectivement par u_1 et par u_2.
Alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales $\Leftrightarrow (u_1 \mid u_2) = 0$.

– Au sens de la définition, on ne peut jamais dire de deux plans affines qu'ils sont orthogonaux.

– *Normales à un plan affine*
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction P. $P^{\perp}$ est une droite vectorielle D. On dit que D est *la normale* au plan vectoriel P, et qu'une droite affine $\mathcal{D}$ de direction D est *une normale* au plan affine $\mathcal{P}$. On dit qu'un vecteur directeur a de D est un vecteur normal à P, ou à $\mathcal{P}$.

– *Équations de plans*
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction P. Soit $(e) = e_1, e_2, e_3$ une base orthonormale.
On se donne un vecteur $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ non nul.
Les condition suivantes sont équivalentes :
◇ Le vecteur a est normal à l'hyperplan H.
◇ Une équation de P est $(a \mid u) = 0$, c'est-à-dire $a_1x + a_2y + a_3z = 0$.
◇ Une équation de $\mathcal{P}$ est $(a \mid u) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ c'est-à-dire $a_1x + a_2y + a_3z = \lambda$.

– *Exemples*
On se place dans un espace euclidien E de dimension 3, muni d'une base orthonormale.
◇ La normale au plan vectoriel d'équation $2x + 5y - 3z = 0$ est dirigée par $a = (2, 5, -3)$.
◇ Soit $\mathcal{P}$ le plan affine orthogonal au vecteur $a = (1, 3, -2)$ et passant par $\Omega(4, -5, -7)$.
Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $(x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 7) = 0$, donc $x + 3y - 2z = 3$.

Plans perpendiculaires

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines de E, de directions P_1 et P_2.

On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont *perpendiculaires* si $P_1^\perp \subset P_2$, c'est-à-dire si $P_2^\perp \subset P_1$.

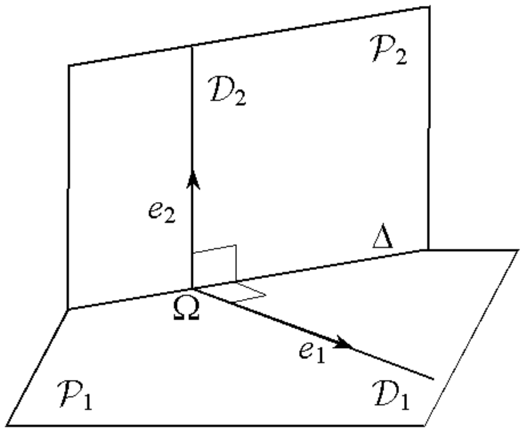
Cela signifie que l'un des plans contient une normale à l'autre.

Cela équivaut aussi à dire que leurs normales sont des droites orthogonales.

Supposons que les équations de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = \lambda_2 \end{cases}$

Alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

On a représenté ici deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Ces plans se coupent suivant une droite Δ.
Soit Ω un point de la droite Δ.
Puisque la droite $\mathcal{D}_1$ passant par Ω et orthogonale à $\mathcal{P}_2$ est dans $\mathcal{P}_1$,
Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.
De même, la droite $\mathcal{D}_2$ passant par Ω et orthogonale à $\mathcal{P}_1$ est dans $\mathcal{P}_2$.



Définition *(Projection orthogonale sur un sous-espace affine)*

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine dedirection F.
La projection $p_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$ est appelée *projection affine orthogonale* sur $\mathcal{F}$.

Proposition *(Distance d'un point à un sous-espace affine)*

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine, de direction F. Soit M un point de E.
On appelle *distance* de M à $\mathcal{F}$ le réel $d(M, \mathcal{F}) = \inf \{d(M, \Omega), \Omega \in \mathcal{F}\}$.
Cette borne inférieure est un minimum, atteint uniquement pour $H = p_{\mathcal{F}}(M)$.
La projection orthogonale H de M sur $\mathcal{F}$ est donc le point de $\mathcal{F}$ le plus "proche" de M.
Pour tout point Ω de $\mathcal{F}$, on a : $\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega H}\|^2 + d(M, \mathcal{F})^2$.

On a représenté la projection H de M sur le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F.
Pour tout Ω de $\mathcal{F}$, on a $\|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2$.
On voit en effet que le triangle $MH\Omega$ est rectangle en H.