



Table des matières

| | | |
|-------|---|----|
| I | Translations, sous-espaces affines | 2 |
| I.1 | Translations | 2 |
| I.2 | Sous-espaces affines | 3 |
| I.3 | Parallélisme et intersection de sous-espaces affines | 4 |
| II | Repères cartésiens | 5 |
| II.1 | Représentations paramétriques d'une droite ou d'un plan | 5 |
| II.2 | Équations cartésiennes d'un plan | 7 |
| II.3 | Équations cartésiennes d'une droite affine | 10 |
| III | Barycentres et convexité | 11 |
| III.1 | Barycentres | 11 |
| III.2 | Barycentres et sous-espaces affines | 13 |
| III.3 | Parties convexes | 14 |
| IV | Applications affines | 15 |
| IV.1 | Applications affines | 15 |
| IV.2 | Isomorphismes affines | 17 |
| IV.3 | Applications affines et sous-espaces affines | 18 |
| IV.4 | Projections, symétries, affinités | 19 |
| IV.5 | Barycentres et applications affines | 23 |

I Translations, sous-espaces affines

Dans tout ce chapitre, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n = 3$ (mais la plupart des notions abordées ici peuvent être généralisées à n quelconque.)

La géométrie du plan a été traitée en première période.

On pourrait très bien se limiter à $E = \mathbb{R}^3$.

Les éléments de E , selon le rôle qu'on leur fait jouer, sont appelés *points* ou *vecteurs*.

Pour limiter les ambiguïtés, on utilisera quelques conventions de notation :

- Les *points* seront notés A, B, \dots, M, N, \dots
Le vecteur nul $\vec{0}$, considéré comme un point de E , sera noté O .
- Les vecteurs seront notés a, b, u, v, \dots , parfois $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{u}, \vec{v}, \dots$
- Les sous-espaces vectoriels de E seront notés F, G, H, \dots
- On définira les *sous-espaces affines* de E , et on les notera $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$

I.1 Translations

Définition

- || Soit u un vecteur de E .
|| L'application $t_u : E \rightarrow E$ définie par $t_u(A) = A + u$ est appelée *translation* de vecteur u .

Propriétés

- Pour tous u, v de E : $t_v \circ t_u = t_u \circ t_v = t_{u+v}$.
On a $t_{\vec{0}} = \text{Id}$; Pour tout vecteur u de E , t_u est bijective et $(t_u)^{-1} = t_{-u}$.
Si $u \neq \vec{0}$, la translation $t_{\vec{0}} = \text{Id}$ n'est pas linéaire, car $t_u(O) = u \neq O$.
- Soient A, B deux points de E . Il existe un unique u de E tel que $B = t_u(A) = A + u$.
Ce vecteur, égal à $B - A$, est noté \overrightarrow{AB} .

Avec cette notation, et pour tous points A, B, C de E :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

- Soient A, B deux points de E . On note $[A, B] = \{M \in E, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\}$.
On dit que $[A, B]$ est le *segment* d'origine A et d'extrémité B . On vérifie que $[A, B] = [B, A]$.
En particulier, le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ est appelé le *milieu* du segment $[A, B]$.
- Soient A, B, C, D quatre points de E . On a les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \exists u \in E, \begin{cases} t_u(A) = C \\ t_u(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow [A, D] \text{ et } [B, C] \text{ ont même milieu}$$

On exprime ces conditions en disant que le quadruplet (A, B, D, C) est un *parallélogramme*.

Il en est alors de même pour les quadruplets (B, D, C, A) , ou (A, C, D, B) .

I.2 Sous-espaces affines

Définition

On dit qu'une partie \mathcal{F} de E est un *sous-espace affine* s'il existe un point A de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F} = A + F$. On dit alors que \mathcal{F} est le sous-espace affine de E passant par A et de direction F .

Remarques et propriétés

- Soient A un point de E , et F un sous-espace vectoriel de E .
On peut écrire $\mathcal{F} = A + F = \{A + u, u \in F\} = \{t_A(u), u \in F\} = t_A(F)$.
Ainsi les sous-espaces affines de E sont les translatés des sous-espaces vectoriels de E .
Les sous-espaces vectoriels de E sont les sous-espaces affines qui passent par O .
- Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E , passant par A et de direction F . Alors $F = \{\overrightarrow{AB}, B \in \mathcal{F}\}$.
Autrement dit, la direction d'un sous-espace affine de E est définie de manière unique.
- Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E , de direction F . Pour tout B de \mathcal{F} , on a $\mathcal{F} = B + F$.
Un sous-espace affine est donc défini par sa direction et par l'un *quelconque* de ses points.
Donc deux sous-espaces affines sont égaux \Leftrightarrow ils ont la même direction et un point en commun.
- Si A est un point de E , alors le singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine de E .
Plus précisément, c'est le sous-espace affine de E passant par A de direction $\{\vec{0}\}$.
 $\forall A \in E, A + E = E$. Ainsi E est un sous-espace affine de lui-même, de direction lui-même.

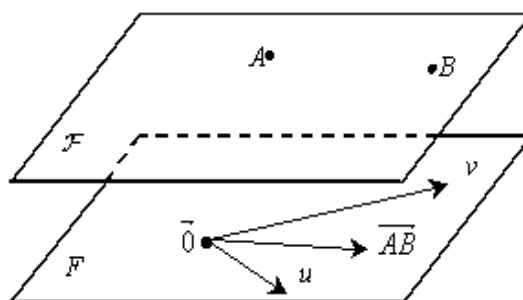
Définition

On appelle dimension d'un sous-espace affine \mathcal{F} la dimension de sa direction F .

- ◇ Les singletons de E sont les sous-espaces affines de dimension 0.
- ◇ On appelle *droites affines* les sous-espaces affines de dimension 1.
- ◇ On appelle *plans affines* les sous-espaces affines de dimension 2.

Ici \mathcal{F} est un plan affine passant par A et de direction un plan vectoriel F de base (u, v) .

Dire que B est dans \mathcal{F} ,
c'est dire que le vecteur \overrightarrow{AB}
est dans F , ou encore est
combinaison linéaire de u et v .



Remarques

- Pour toute partie \mathcal{F} de E :
 - ◇ \mathcal{F} est une droite affine si et seulement si il existe un point A de E et un vecteur non nul u de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, B = A + \lambda u$.
On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u)$ et on dit que u est un *vecteur directeur* de \mathcal{F} .

- ◇ \mathcal{F} est un plan affine si et seulement si il existe un point A de E et deux vecteurs indépendants u, v de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, B = A + \lambda u + \mu v$.

On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u, v)$.

Définition

|| On dit que des points de E sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite affine.

|| On dit qu'ils sont *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan affine.

Remarques

- Deux points A, B sont toujours alignés.

S'ils sont distincts, ils appartiennent à une seule droite \mathcal{D} : la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{AB})$.

- Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont liés.

Si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, on dit qu'ils forment un *vrai triangle*.

- Trois points A, B, C sont toujours coplanaires.

Supposons qu'ils ne soient pas alignés (donc que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} soient libres.)

Alors ils appartiennent à un seul plan \mathcal{P} : le plan $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Ce plan peut tout aussi bien être noté $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ou $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

- Quatre points A, B, C, D sont coplanaires \Leftrightarrow les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont liés.

I.3 Parallélisme et intersection de sous-espaces affines

Définition

|| Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E , de directions respectives F et G .

|| ◇ On dit que \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} si on a l'inclusion $F \subset G$.

|| ◇ On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles (et on note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$) si on a l'égalité $F = G$.

Remarques

- Un singleton est parallèle à n'importe quel sous-espace affine.

Une droite peut être parallèle à un plan, mais l'inverse est impossible.

- Deux droites affines sont parallèles \Leftrightarrow elles ont un vecteur directeur commun.

- \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles \Leftrightarrow il existe u dans E tel que $t_u(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.

Plus précisément, si $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ on a $\mathcal{G} = t_u(\mathcal{F})$ pour tout $u = \overrightarrow{AB}$ où $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$.

- Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E , et A un point de E .

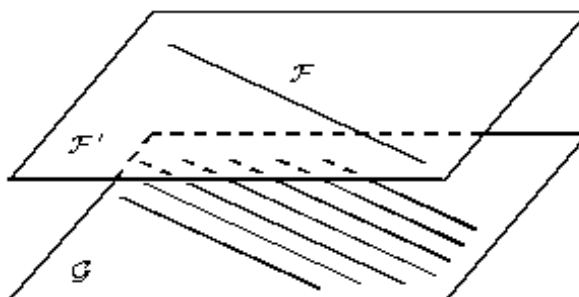
Par le point A , il passe un unique sous-espace affine \mathcal{G} tel que $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.

La direction F de \mathcal{F} est le sous-espace affine passant par O et tel que $F \parallel \mathcal{F}$.

- Ici la droite \mathcal{F} est parallèle au pla

Il existe un plan unique \mathcal{F}' contenant \mathcal{F} et parallèle à \mathcal{G} .

En revanche, \mathcal{G} contient une infinité de droites parallèles à \mathcal{F} .



Proposition

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E .

- ◇ Si \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} , alors ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou bien $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
- ◇ Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, alors ils sont ou bien disjoints ou bien confondus.

Proposition

Soient \mathcal{F}, \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E , de directions respectives F et G .

- ◇ L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.
Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ on dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont *concourants* ou *sécants*.
- ◇ Si $E = F + G$, alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide.
- ◇ Si $E = F \oplus G$, alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ se réduit à un singleton.
On exprime cette situation en disant que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont supplémentaires.

Exemples et remarques

- Soit \mathcal{P} un plan affine, et soit \mathcal{D} une droite affine non parallèle à \mathcal{P} .
Alors la droite \mathcal{D} “coupe” le plan \mathcal{H} en un point et un seul.
- Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux plans affines non parallèles : leur intersection est une droite affine.
- Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites affines de E .
 - ◇ On dit que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont coplanaires si elles sont incluses dans un même plan affine \mathcal{P} .
Cela équivaut à dire que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ou concourantes.
Si $\mathcal{D}_1 = (A, u)$ et $\mathcal{D}_2 = (B, v)$, cela équivaut à dire que $\text{rg}(\overrightarrow{AB}, u, v) \leq 2$.
Dans ce cas, et si $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$, le plan \mathcal{P} est défini de manière unique par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .
 - ◇ Si les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas coplanaires, leur intersection est vide.

II Repères cartésiens

II.1 Représentations paramétriques d'une droite ou d'un plan

On rappelle qu'on se place dans un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension 3.

Définition

Un repère cartésien est la donnée $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$ d'un point Ω et d'une base e_1, e_2, e_3 .
Tout point M de E est alors représenté de manière unique par ses coordonnées dans ce repère, c'est-à-dire par le triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{\Omega M} = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Représentation paramétrique d'une droite \mathcal{D}

- C'est la donnée d'un point A de \mathcal{D} et d'un vecteur u non nul de sa direction D .
La représentation paramétrique associée est alors : $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto M = A + \lambda u$.
On dit que λ est l'*abscisse* de M sur l'axe (A, u) .
Si $M = A + \lambda u$ et $N = A + \mu u$, alors la quantité $\overline{MN} = \mu - \lambda$ est appelée *mesure algébrique* de (M, N) sur l'axe (A, u) (elle ne dépend pas du choix du point A de \mathcal{D} .)

- Supposons que E soit rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e_1, e_2, e_3))$.
Notons (x, y, z) les coordonnées de M , (a, b, c) celles de A et (α, β, γ) celles de u .

Alors la représentation paramétrique de $\mathcal{D} = (A, u)$ s'écrit :
$$\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \\ z = c + \lambda\gamma \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, le système précédent définit la droite passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigée par le vecteur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

Représentation paramétrique d'un plan

- Soit \mathcal{P} un plan affine défini par un point A et un couple (u, v) de vecteurs non proportionnels.

La représentation paramétrique associée est alors : $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M = A + \lambda u + \mu v$.

- Supposons que E soit rapporté au repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2, e_3)$.

Notons (x, y, z) les coordonnées de M , (a, b, c) celles de A .

Notons (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ les composantes de u et v dans (e) .

La représentation paramétrique de $\mathcal{P} = (A, u, v)$ s'écrit
$$\begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont libres, le système précédent définit le plan passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigé par les vecteurs $u(\alpha, \beta, \gamma)$ et $v(\alpha', \beta', \gamma')$.

Changement de repère dans un espace affine

- Soient $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', (\varepsilon))$ deux repères cartésiens de E .

Soit M un point quelconque de E , de coordonnées $\begin{cases} x, y, z & \text{dans } \mathcal{R} \\ x', y', z' & \text{dans } \mathcal{R}' \end{cases}$
Soient α, β, γ les coordonnées de Ω' dans \mathcal{R} .

Soit P la matrice de passage de la base (e) à la base (ε) .

Alors on a l'égalité :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ ou encore } [M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$$
.

On voit que la matrice de passage P (de l'ancienne base (e) vers la nouvelle base (ε)) permet d'exprimer les "anciennes" coordonnées de M en fonction des "nouvelles".

L'égalité $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$ s'écrit d'ailleurs $[\overrightarrow{\Omega'M}]_{(e)} = P[\overrightarrow{\Omega'M}]_{(\varepsilon)}$.

Si on veut les nouvelles coordonnées de M en fonction des anciennes, il faut donc inverser la matrice P et écrire : $[M]_{\mathcal{R}'} = P^{-1}([M]_{\mathcal{R}} - [\Omega']_{\mathcal{R}})$ ou encore $[\overrightarrow{\Omega'M}]_{(\varepsilon)} = P^{-1}[\overrightarrow{\Omega'M}]_{(e)}$.

- Un cas très simple est celui on effectue une translation du repère.

Avec les notations précédentes, $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$, $\mathcal{R}' = (\Omega', (e))$ et $P = I_3$.

Le changement de repère se réduit à $[M]_{\mathcal{R}'} = [M]_{\mathcal{R}}$ c'est-à-dire à
$$\begin{cases} x = \alpha + x' \\ y = \beta + y' \\ z = \gamma + z' \end{cases}$$

Demi-droites, demi-plans

– Soit A un point de E et u un vecteur non nul.

On dit que $\{M = A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ est la *demi-droite* d'origine A et de vecteur directeur u .

– Soit A un point de E et u, v deux vecteurs indépendants.

Considérons l'ensemble \mathcal{P}^+ défini par $\mathcal{P}^+ = \{M = A + \lambda u + \mu v, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^+\}$.

On dit que \mathcal{P}^+ est le *demi-plan* défini par la droite (A, u) et le vecteur v .

II.2 Équations cartésiennes d'un plan

Proposition

Une partie \mathcal{P} de E est un plan \Leftrightarrow il existe une forme linéaire f non nulle et α dans \mathbb{R} tels que : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow f(M) = \alpha$. Une telle caractérisation est appelée une *équation* du plan \mathcal{P} .

◇ Les équations $f(M) = \beta$ sont celles des plans parallèles à \mathcal{P} .

Par exemple $f(M) = f(M_0)$ est l'équation du plan parallèle à \mathcal{P} et passant par M_0 .

L'équation $f(M) = 0$ est celle de la direction P de \mathcal{P} .

◇ L'équation $f(M) = \alpha$ de \mathcal{P} est unique à un facteur multiplicatif non nul près.

Sous cette réserve, on parle de **L**'équation de \mathcal{P} .

Équation cartésienne dans un repère

On suppose que E est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$.

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point M quelconque de E .

– Une partie \mathcal{P} de E est un plan si et seulement si il existe trois scalaires (a, b, c) non tous nuls et un scalaire d tels que $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz = d$.

On parle alors de l'*équation cartésienne* de \mathcal{P} dans le repère \mathcal{R} .

– Les équations $ax + by + cz = \lambda$ sont celles des plans parallèles à \mathcal{P} .

L'équation $ax + by + cz = 0$ est celle de la direction P de \mathcal{P} .

– Soit Ω un point de E , de coordonnées (α, β, γ) .

Le plan de direction P et passant par Ω a pour équation : $a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0$.

– Considérons les équations $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ de deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

On a $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. On a $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$.

(Par convention, si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant l'est également.)

Plans particuliers

On suppose que E est muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$.

– Les plans parallèles au plan (Ω, e_2, e_3) ont une équation du type $x = \alpha$.

Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_3) ont une équation du type $y = \beta$.

Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_2) ont une équation du type $z = \gamma$.

- La droite (Ω, e_1) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de \mathcal{P} s'écrit $by + cz = d$.
- La droite (Ω, e_2) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de \mathcal{P} s'écrit $ax + cz = d$.
- La droite (Ω, e_3) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de \mathcal{P} s'écrit $ax + by = d$.
- L'équation d'un plan \mathcal{P} non parallèle à (Ω, e_1, e_2) peut s'écrire $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.
- Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans non parallèles à (O, e_1, e_2) , d'équations
$$\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + \gamma \\ z = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$$
- Alors ces plans sont parallèles $\Leftrightarrow \alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.
- On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.
- Le plan passant par A, B, C a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Intersection de deux plans non parallèles

Supposons que $\begin{cases} (\mathcal{P}) : ax + by + cz = d \\ (\mathcal{P}') : a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ ne soient pas parallèles.

Alors leur intersection est une droite donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Déterminants et équations de plans

L'équation de \mathcal{P} défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ u(\alpha, \beta, \gamma) \\ v(\alpha', \beta', \gamma') \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha & \alpha' \\ y & y_0 & \beta & \beta' \\ z & z_0 & \gamma & \gamma' \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Le plan défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On en déduit que les quatre points $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \\ D(x_3, y_3, z_3) \end{cases}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Faisceaux de plans

Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans distincts, d'équations respectives (E) et (E') .

On forme une famille d'équations de plans en écrivant $\lambda(E) + \mu(E')$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

◇ Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sont parallèles, on obtient ainsi tous les plans qui leur sont parallèles.

◇ Sinon, on obtient tous les plans contenant la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Dans tous les cas, on dit que l'ensemble obtenu est le *faisceau de plans* engendré par $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.

Avec $\mu \in \mathbb{R}$, les équations $(E) + \mu(E')$ donnent tous les plans du faisceau sauf \mathcal{P}' .

- On considère trois plans, d'équations $ax+by+cz = d$, $a'x+b'y+c'z = d'$ et $a''x+b''y+c''z = d''$.

Ces trois plans sont parallèles ou passent par une même droite

\Leftrightarrow ils appartiennent à un même faisceau, c'est-à-dire \Leftrightarrow leurs équations sont "liées".

Cela équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 2 .

De l'équation cartésienne à une représentation paramétrique

On passe facilement de l'équation cartésienne de \mathcal{P} à une représentation paramétrique.

En effet, soit $ax + by + cz = d$ l'équation de \mathcal{P} dans le repère \mathcal{R} .

Pour fixer les idées, supposons par exemple $a \neq 0$.

Dans ces conditions, le point Ω de coordonnées $(\frac{d}{a}, 0, 0)$ est un point particulier de \mathcal{P} .

$\begin{cases} u = (b, -a, 0) \\ v = (c, 0, -a) \end{cases}$ forment une base de la direction de \mathcal{P} .

Une représentation paramétrique de \mathcal{P} est $M = \Omega + \lambda u + \mu v$, donc $\begin{cases} x = \frac{d}{a} + \lambda b + \mu c \\ y = -\lambda a \\ z = -\mu a \end{cases} (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Par exemple, soit \mathcal{P} le plan d'équation $2x + 3y - 5z = 8$.

Une base de la direction P de \mathcal{P} (d'équation $2x + 3y - 5z = 0$) est $\begin{cases} u = (3, -2, 0) \\ v = (5, 0, 2) \end{cases}$

Le point $\Omega(4, 0, 0)$ appartient à \mathcal{P} .

Une représentation paramétrique de \mathcal{P} est donc $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + 5\mu \\ y = -2\lambda, z = 2\mu \end{cases}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'une représentation paramétrique à l'équation cartésienne

– Soit \mathcal{P} le plan passant par $A = (1, 2, 3)$ et dirigé par $\begin{cases} u = (3, 1, 2) \\ v = (4, 0, 5) \end{cases}$

L'équation de \mathcal{P} s'obtient en écrivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 4 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow 5(x-1) - 7(y-2) - 4(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21$$

On pouvait l'obtenir plus rapidement.

En effet cette équation s'écrit :

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) = 0, \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

– On reprend l'exemple précédent.

On va trouver l'équation cartésienne de \mathcal{P} à partir d'une représentation paramétrique.

Celle-ci s'écrit : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$

On résout ce système par rapport aux inconnues (λ, μ) . L'équation cartésienne cherchée est la condition sur les paramètres x, y, z pour que ce système admette une solution (λ, μ) . :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ x = 1 + 3(y - 2) + 4\mu \\ z = 3 + 2(y - 2) + 5\mu \end{cases}$$

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ 4\mu = x - 3y + 5 \\ 5\mu = 1 - 2y + z \end{cases} \Leftrightarrow 5(x - 3y + 5) = 4(1 - 2y + z)$$

$$\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21$$