Table des matières

I Translations, sous-espaces affines

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n = 3$ (mais la plupart des notions abordées ici peuvent être généralisées à n quelconque.)

La géométrie du plan a été traitée en première période.

On pourrait très bien se limiter à $E = \mathbb{R}^3$.

Les éléments de E, selon le rôle qu'on leur fait jouer, sont appelés *points* ou *vecteurs*.
Pour limiter les ambiguités, on utilisera quelques conventions de notation :

- Les *points* seront notés $A, B, \ldots, M, N, \ldots$.
  Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$, considéré comme un point de E, sera noté O.
- Les vecteurs seront notés $a, b, u, v, \ldots$, parfois $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \ldots, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \ldots$
- Les sous-espaces vectoriels de E seront notés $F, G, H, \ldots$
- On définira les *sous-espaces affines* de E, et on les notera $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$

I.1 Translations

Définition

Soit u un vecteur de E.
L'application $t_u : E \to E$ définie par $t_u(A) = A + u$ est appelée *translation* de vecteur u.

Propriétés

- Pour tous u, v de E : $t_v \circ t_u = t_u \circ t_v = t_{u+v}$.
  On a $t_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}$; Pour tout vecteur u de E, t_u est bijective et $(t_u)^{-1} = t_{-u}$.
  Si $u \neq \overrightarrow{0}$, la translation $t_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}$ n'est pas linéaire, car $t_u(O) = u \neq O$.
- Soient A, B deux points de E. Il existe un unique u de E tel que $B = t_u(A) = A + u$.
  Ce vecteur, égal à $B - A$, est noté $\overrightarrow{AB}$.
  Avec cette notation, et pour tous points A, B, C de E :
  $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B, \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(relation de Chasles)}$$
- Soient A, B deux points de E. On note $[A, B] = \{M \in E, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\}$.
  On dit que $[A, B]$ est le *segment* d'origine A et d'extrémité B. On vérifie que $[A, B] = [B, A]$.
  En particulier, le point I défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est appelé le *milieu* du segment $[A, B]$.
- Soient A, B, C, D quatre points de E. On a les équivalences suivantes :
  $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \exists\, u \in E, \begin{cases} t_u(A) = C \\ t_u(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow [A, D] \text{ et } [B, C] \text{ ont même milieu}$$
  On exprime ces conditions en disant que le quadruplet (A, B, D, C) est un *parallélogramme*.
  Il en est alors de même pour les quadruplets (B, D, C, A), ou (A, C, D, B).

I.2 Sous-espaces affines

Définition

On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* s'il existe un point A de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F} = A + F$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E passant par A et de direction F.

Remarques et propriétés

- Soient A un point de E, et F un sous-espace vectoriel de E.
  On peut écrire $\mathcal{F} = A + F = \{A + u, u \in F\} = \{t_A(u),\ u \in F\} = t_A(F)$.
  Ainsi les sous-espaces affines de E sont les translatés des sous-espaces vectoriels de E.
  Les sous-espaces vectoriels de E sont les sous-espaces affines qui passent par O.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, passant par A et de direction F. Alors $F = \{\overrightarrow{AB}, B \in \mathcal{F}\}$.
  Autrement dit, la direction d'un sous-espace affine de E est définie de manière unique.
- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, de direction F. Pour tout B de $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = B + F$.
  Un sous-espace affine est donc défini par sa direction et par l'un *quelconque* de ses points.
  Donc deux sous-espaces affines sont égaux $\Leftrightarrow$ ils ont la même direction et un point en commun.
- Si A est un point de E, alors le singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine de E.
  Plus précisément, c'est le sous-espace affine de E passant par A de direction $\{\overrightarrow{0}\}$.
  $\forall A \in E, A + E = E$. Ainsi E est un sous-espace affine de lui-même, de direction lui-même.

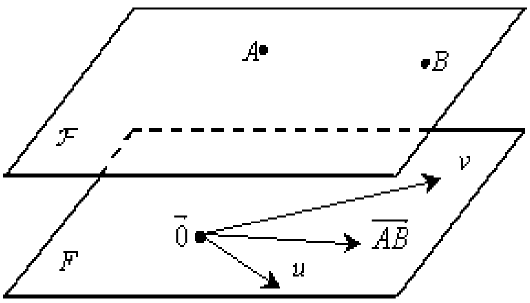
Définition

On appelle dimension d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ la dimension de sa direction F.

- ◇ Les singletons de E sont les sous-espaces affines de dimension 0.
- ◇ On appelle *droites affines* les sous-espaces affines de dimension 1.
- ◇ On appelle *plans affines* les sous-espaces affines de dimension 2.

Ici $\mathcal{F}$ est un plan affine passant par A et de direction un plan vectoriel F de base (u, v).

Dire que B est dans $\mathcal{F}$, c'est dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dans F, ou encore est combinaison linéaire de u et v.



Remarques

- Pour toute partie $\mathcal{F}$ de E :
  - ◇ $\mathcal{F}$ est une droite affine si et seulement si il existe un point A de E et un vecteur non nul u de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ B = A + \lambda u$.
    On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u)$ et on dit que u est un *vecteur directeur* de $\mathcal{F}$.

◇ $\mathcal{F}$ est un plan affine si et seulement si il existe un point A de E et deux vecteurs indépendants u, v de E tels que : $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ B = A + \lambda u + \mu v$.
On peut alors noter $\mathcal{F} = (A, u, v)$.

Définition

On dit que des points de E sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite affine.
On dit qu'ils sont *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan affine.

Remarques

– Deux points A, B sont toujours alignés.
S'ils sont distincts, ils appartiennent à une seule droite $\mathcal{D}$: la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{AB})$.
– Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés.
Si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, on dit qu'ils forment un *vrai triangle.*
– Trois points A, B, C sont toujours coplanaires.
Supposons qu'ils ne soient pas alignés (donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient libres.)
Alors ils appartiennent à un seul plan $\mathcal{P}$: le plan $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Ce plan peut tout aussi bien être noté $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ou $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
– Quatre points A, B, C, D sont coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont liés.

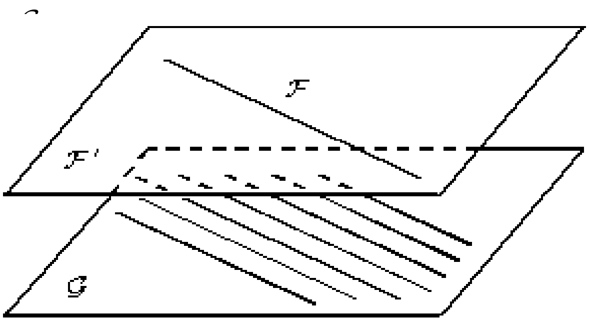
I.3 Parallélisme et intersection de sous-espaces affines

Définition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.
◇ On dit que $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ si on a l'inclusion $F \subset G$.
◇ On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles (et on note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$) si on a l'égalité $F = G$.

Remarques

– Un singleton est parallèle à n'importe quel sous-espace affine.
Une droite peut être parallèle à un plan, mais l'inverse est impossible.
– Deux droites affines sont parallèles $\Leftrightarrow$ elles ont un vecteur directeur commun.
– $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles $\Leftrightarrow$ il existe u dans E tel que $t_u(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.
Plus précisément, si $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ on a $\mathcal{G} = t_u(\mathcal{F})$ pour tout $u = \overrightarrow{AB}$ où $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$.
– Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, et A un point de E.
Par le point A, il passe un unique sous-espace affine $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.
La direction F de $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine passant par O et tel que $F \parallel \mathcal{F}$.
– Ici la droite $\mathcal{F}$ est parallèle au pla



Il existe un plan unique $\mathcal{F}'$ contenant $\mathcal{F}$ et parallèle à $\mathcal{G}$.
En revanche, $\mathcal{G}$ contient une infinité de droites parallèles à $\mathcal{F}$.

Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E.
- ◇ Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou bien $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.
- ◇ Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors ils sont ou bien disjoints ou bien confondus.

Proposition

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.
- ◇ L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, si elle n'est pas vide, est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *concourants* ou *sécants*.
- ◇ Si $E = F + G$, alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide.
- ◇ Si $E = F \oplus G$, alors l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ se réduit à un singleton. On exprime cette situation en disant que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires.

Exemples et remarques

- Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, et soit $\mathcal{D}$ une droite affine non parallèle à $\mathcal{P}$.
  Alors la droite $\mathcal{D}$ "coupe" le plan $\mathcal{H}$ en un point et un seul.
- Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines non parallèles : leur intersection est une droite affine.
- Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines de E.
  - ◇ On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires si elles sont incluses dans un même plan affine $\mathcal{P}$.
    Cela équivaut à dire que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ou concourantes.
    Si $\mathcal{D}_1 = (A, u)$ et $\mathcal{D}_2 = (B, v)$, cela équivaut à dire que $\operatorname{rg}(\overrightarrow{AB}, u, v) \leq 2$.
    Dans ce cas, et si $D_1 \neq \mathcal{D}_2$, le plan $\mathcal{P}$ est défini de manière unique par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
  - ◇ Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, leur intersection est vide.

II Repères cartésiens

II.1 Représentations paramétriques d'une droite ou d'un plan

On rappelle qu'on se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3.

Définition

Un repère cartésien est la donnée $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$ d'un point Ω et d'une base e_1, e_2, e_3. Tout point M de E est alors représenté de manière unique par ses coordonnées dans ce repère, c'est-à-dire par le triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{\Omega M} = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$

- C'est la donnée d'un point A de $\mathcal{D}$ et d'un vecteur u non nul de sa direction D.
  La représentation paramétrique associée est alors : $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto M = A + \lambda u$.
  On dit que λ est l'*abscisse* de M sur l'axe (A, u).
  Si $M = A + \lambda u$ et $N = A + \mu u$, alors la quantité $\overline{MN} = \mu - \lambda$ est appelée *mesure algébrique* de (M, N) sur l'axe (A, u) (elle ne dépend pas du choix du point A de $\mathcal{D}$.)

– Supposons que E soit rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e_1, e_2, e_3))$.
Notons (x, y, z) les coordonnées de M, (a, b, c) celles de A et (α, β, γ) celles de u.
Alors la représentation paramétrique de $\mathcal{D} = (A, u)$ s'écrit : $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \\ z = c + \lambda\gamma \end{cases}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, le système précédent définit la droite passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigée par le vecteur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

Représentation paramétrique d'un plan

– Soit $\mathcal{P}$ un plan affine défini par un point A et un couple (u, v) de vecteurs non proportionnels.
La représentation paramétrique associée est alors : $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto M = A + \lambda u + \mu v$.

– Supposons que E soit rapporté au repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, (e) = e_1, e_2, e_3)$.
Notons (x, y, z) les coordonnées de M, (a, b, c) celles de A.
Notons (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ les composantes de u et v dans (e).
La représentation paramétrique de $\mathcal{P} = (A, u, v)$ s'écrit $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = b + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = c + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Réciproquement, si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont libres, le système précédent définit le plan passant par le point $A(a, b, c)$ et dirigé par les vecteurs $u(\alpha, \beta, \gamma)$ et $v(\alpha', \beta', \gamma')$.

Changement de repère dans un espace affine

– Soient $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', (\varepsilon))$ deux repères cartésiens de E.
Soit M un point quelconque de E, de coordonnées $\begin{cases} x, y, z & \text{dans } \mathcal{R} \\ x', y', z' & \text{dans } \mathcal{R}' \end{cases}$
Soient α, β, γ les coordonnées de Ω' dans $\mathcal{R}$.
Soit P la matrice de passage de la base (e) à la base (ε).
Alors on a l'égalité : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, ou encore $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$.
On voit que la matrice de passage P (de l'ancienne base (e) vers la nouvelle base (ε)) permet d'exprimer les "anciennes" coordonnées de M en fonction des "nouvelles".
L'égalité $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + P[M]_{\mathcal{R}'}$ s'écrit d'ailleurs $[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(e)} = P[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(\varepsilon)}$.
Si on veut les nouvelles coordonnées de M en fonction des anciennes, il faut donc inverser la matrice P et écrire : $[M]_{\mathcal{R}'} = P^{-1}([M]_{\mathcal{R}} - [\Omega']_{\mathcal{R}})$ ou encore $[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(\varepsilon)} = P^{-1}[\overrightarrow{\Omega' M}]_{(e)}$.

– Un cas très simple est celui on effectue une translation du repère.
Avec les notations précédentes, $\mathcal{R} = (\Omega, (e))$, $\mathcal{R} = (\Omega', (e))$ et $P = I_3$.
Le changement de repère se réduit à $[M]_{\mathcal{R}} = [\Omega']_{\mathcal{R}} + [M]_{\mathcal{R}'}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} x = \alpha + x' \\ y = \beta + y' \\ z = \gamma + z' \end{cases}$

Demi-droites, demi-plans

– Soit A un point de E et u un vecteur non nul.
  On dit que $\{M = A + \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ est la *demi-droite* d'origine A et de vecteur directeur u.
– Soit A un point de E et u, v deux vecteurs indépendants.
  Considérons l'ensemble $\mathcal{P}^+$ défini par $\mathcal{P}^+ = \{M = A + \lambda u + \mu v,\ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^+\}$.
  On dit que $\mathcal{P}^+$ est le *demi-plan* défini par la droite (A, u) et le vecteur v.

II.2 Équations cartésiennes d'un plan

Proposition

Une partie $\mathcal{P}$ de E est un plan $\Leftrightarrow$ il existe une forme linéaire f non nulle et α dans $\mathbb{R}$ tels que : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow f(M) = \alpha$. Une telle caractérisation est appelée une *équation* du plan $\mathcal{P}$.

◇ Les équations $f(M) = \beta$ sont celles des plans parallèles à $\mathcal{P}$.
  Par exemple $f(M) = f(M_0)$ est l'équation du plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par M_0.
  L'équation $f(M) = 0$ est celle de la direction P de $\mathcal{P}$.

◇ L'équation $f(M) = \alpha$ de $\mathcal{P}$ est unique à un facteur multiplicatif non nul près.
  Sous cette réserve, on parle de **L**'équation de $\mathcal{P}$.

Équation cartésienne dans un repère

On suppose que E est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$.
Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point M quelconque de E.

– Une partie $\mathcal{P}$ de E est un plan si et seulement si il existe trois scalaires (a, b, c) non tous nuls et un scalaire d tels que $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz = d$.
  On parle alors de l'*équation cartésienne* de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
– Les équations $ax + by + cz = \lambda$ sont celles des plans parallèles à $\mathcal{P}$.
  L'équation $ax + by + cz = 0$ est celle de la direction P de $\mathcal{P}$.
– Soit Ω un point de E, de coordonnées (α, β, γ).
  Le plan de direction P et passant par Ω a pour équation : $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma) = 0$.
– Considérons les équations $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
  On a $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. On a $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$.
  (Par convention, si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant l'est également.)

Plans particuliers

On suppose que E est muni d'un repère $\mathcal{R} = (\Omega, e_1, e_2, e_3)$.

– Les plans parallèles au plan (Ω, e_2, e_3) ont une équation du type $x = \alpha$.
  Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_3) ont une équation du type $y = \beta$.
  Les plans parallèles au plan (Ω, e_1, e_2) ont une équation du type $z = \gamma$.

– La droite (Ω, e_1) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $by + cz = d$.
La droite (Ω, e_2) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $ax + cz = d$.
La droite (Ω, e_3) est parallèle à $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit $ax + by = d$.

– L'équation d'un plan $\mathcal{P}$ non parallèle à (Ω, e_1, e_2) peut s'écrire $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans non parallèles à (O, e_1, e_2), d'équations $\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + \gamma \\ z = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$.
Alors ces plans sont parallèles $\Leftrightarrow \alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

– On considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.
Le plan passant par A, B, C a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Intersection de deux plans non parallèles

Supposons que $\begin{cases} (\mathcal{P}) : \quad a\,x + b\,y + c\,z = d \\ (\mathcal{P}') : \; a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ ne soient pas parallèles.

Alors leur intersection est une droite donc un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Déterminants et équations de plans

L'équation de $\mathcal{P}$ défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ u(\alpha, \beta, \gamma) \\ v(\alpha', \beta', \gamma') \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha & \alpha' \\ y & y_0 & \beta & \beta' \\ z & z_0 & \gamma & \gamma' \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Le plan défini par $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On en déduit que les quatre points $\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \\ C(x_2, y_2, z_2) \\ D(x_3, y_3, z_3) \end{cases}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Faisceaux de plans

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans distincts, d'équations respectives (E) et (E').

On forme une famille d'équations de plans en écrivant $\lambda(E) + \mu(E')$, avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

◇ Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sont parallèles, on obtient ainsi tous les plans qui leur sont parallèles.

◇ Sinon, on obtient tous les plans contenant la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Dans tous les cas, on dit que l'ensemble obtenu est le *faisceau de plans* engendré par $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.
Avec $\mu \in \mathbb{R}$, les équations $(E) + \mu(E')$ donnent tous les plans du faisceau sauf $\mathcal{P}'$.

– On considère trois plans, d'équations $ax+by+cz = d$, $a'x+b'y+c'z = d'$ et $a''x+b''y+c''z = d''$.
Ces trois plans sont parallèles ou passent par une même droite
$\Leftrightarrow$ ils appartiennent à un même faisceau, c'est-à-dire $\Leftrightarrow$ leurs équations sont "liées".
Cela équivaut à dire que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 2.

De l'équation cartésienne à une représentation paramétrique

On passe facilement de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ à une représentation paramétrique.
En effet, soit $ax + by + cz = d$ l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
Pour fixer les idées, supposons par exemple $a \neq 0$.
Dans ces conditions, le point Ω de coordonnées $(\frac{d}{a}, 0, 0)$ est un point particulier de $\mathcal{P}$.
$\begin{cases} u = (b, -a, 0,) \\ v = (c, 0, -a) \end{cases}$ forment une base de la direction de $\mathcal{P}$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est $M = \Omega + \lambda u + \mu v$, donc $\begin{cases} x = \frac{d}{a} + \lambda b + \mu c \\ y = -\lambda a \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -\mu a \end{cases}$
Par exemple, soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 5z = 8$.
Une base de la direction P de $\mathcal{P}$ (d'équation $2x + 3y - 5z = 0$) est $\begin{cases} u = (3, -2, 0) \\ v = (5, 0, 2) \end{cases}$
Le point $\Omega(4, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donc $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + 5\mu \\ y = -2\lambda, \ \ z = 2\mu \end{cases}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

D'une représentation paramétrique à l'équation cartésienne

– Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A = (1, 2, 3)$ et dirigé par $\begin{cases} u = (3, 1, 2) \\ v = (4, 0, 5) \end{cases}$
L'équation de $\mathcal{P}$ s'obtient en écrivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 4 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow 5(x-1) - 7(y-2) - 4(z-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21 \end{aligned}$$

On pouvait l'obtenir plus rapidement.
En effet cette équation s'écrit :

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) = 0, \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

– On reprend l'exemple précédent.
On va trouver l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ à partir d'une représentation paramétrique.

Celle-ci s'écrit : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$

On résout ce système par rapport aux inconnues (λ, μ). L'équation cartésienne cherchée est la condition sur les paramètres x, y, z pour que ce système admette une solution (λ, μ). :

$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases} \Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ x = 1 + 3(y-2) + 4\mu \\ z = 3 + 2(y-2) + 5\mu \end{cases}$$

$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda = y - 2 \\ 4\mu = x - 3y + 5 \\ 5\mu = 1 - 2y + z \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow 5(x - 3y + 5) = 4(1 - 2y + z) \\ &\Leftrightarrow 5x - 7y - 4z = -21 \end{aligned}$$