# Table des matières

# I Produit scalaire

Dans ce chapitre, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

## I.1 Définition et premières propriétés

**Définition** *(Produit scalaire)*

On dit que l'application $f: E \times E \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* si :

◇ (a) $\forall (u,u',v,v') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u,v) + \beta f(u',v)$ : on dit que $f$ est *linéaire à gauche*.

$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u,v) + \beta f(u,v')$ : on dit que $f$ est *linéaire à droite*.

◇ (b) $\forall (u,v) \in E^2$, $f(v,u) = f(u,v)$ : on dit que $f$ est *symétrique*.

◇ (c) $\forall u \in E$, $f(u,u) \in \mathbb{R}^+$ : on dit que $f$ est *positive*.

◇ (d) $\forall u \in E$, $f(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$ : on dit que $f$ est *définie*.

**Définition** *(Espace euclidien)*

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien réel*.
Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

**Remarques**

- La propriété (a) s'énonce en disant que $f$ est *bilinéaire*.
- Un produit scalaire sur $E$ est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Si le caractère symétrique de $f$ est établi, la linéarité à droite équivaut à la linéarité à gauche : le point (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(u,v)$, on note souvent $<u,v>$, ou $u \cdot v$, ou $(u \mid v)$.

  Avec la notation $(\cdot \mid \cdot)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :

  $\forall (u,u',v,v') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

  $$\begin{cases} (\alpha u + \beta u' \mid v) = \alpha\,(u \mid v) + \beta\,(u' \mid v) \\ (u \mid \alpha v + \beta v') = \alpha\,(u \mid v) + \beta\,(u \mid v') \\ (v \mid u) = (u \mid v) \quad ; \quad (u \mid u) \geq 0 \quad ; \quad (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0} \end{cases}$$
- Si $E$ est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est encore euclidien, avec la restriction du produit scalaire.

**Proposition** *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur $E$.
Alors $\forall (u,v) \in E^2$, $\quad (u \mid v)^2 \leq (u \mid u)\,(v \mid v)$.
De plus, il y a égalité $\Leftrightarrow$ $u$ et $v$ sont liés.

## I.2 Exemples classiques

### Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Soient $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$.

L'application : $(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ est le *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.

"Cauchy-Schwarz" s'écrit alors : $\begin{cases} \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \ \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\Big)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$

Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur $u$ de $\mathbb{R}^n$, alors $(u \mid v) = {}^{\mathsf{T}}[u]\,[v]$.

### Un produit scalaire entre applications continues

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

L'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

"Cauchy-Schwarz" s'écrit alors : $\forall\,(f, g) \in E^2,\ \left(\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 \le \displaystyle\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t$

### Un produit scalaire entre applications continues périodiques

Soit $E$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et $2\pi$-périodiques.

L'application $(f, g) \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E$.

## I.3 Norme et distance associées à un produit scalaire

**Proposition** *(Norme euclidienne associée à un produit scalaire)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur $E$. On pose : $\forall\, u \in E,\ \|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$.
Cette application vérifie :

- $\diamond$ $\forall\, u \in E,\ \|u\| \ge 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.
- $\diamond$ $\forall\, u \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$.
- $\diamond$ $\forall\,(u, v) \in E^2,\ \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (*inégalité triangulaire*, ou de *Minkowski*.)

On exprime ces propriétés en disant que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une *norme* sur $E$.
On l'appelle norme *euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

### Remarques

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit maintenant : $\forall\,(u, v) \in E^2,\ |(u \mid v)| \le \|u\|\ \|v\|$.
- Pour tous vecteurs $u$ et $v$ de $E$, on a : $\Big|\, \|u\| - \|v\| \,\Big| \le \|u \pm v\|$.
- Avec nos deux premiers exemples de produit scalaire, les normes associées s'écrivent :

Sur $\mathbb{R}^n$ : $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ , et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ : $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t}$.

**Définition** *(Distance associée à un produit scalaire)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur $E$, et soit $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.
L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$, définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad \begin{cases} d(u,v) = d(v,u) \ ; \quad d(u,v) \geq 0 \ ; \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

On exprime ces propriétés en disant que l'application $d$ est une *distance*, dite associée à la norme euclidienne, et donc au produit scalaire.

### I.4 Relations entre le produit scalaire et la norme associée

**Proposition** *(Identités du parallélogramme et de polarisation)*

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.
$\forall (u, v) \in E^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta\, (u \mid v) + \beta^2 \|v\|^2$.

En particulier, $\begin{cases} \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \\ \|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \end{cases}$

Par addition, on en déduit : $\forall (u, v) \in E^2,\ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.
Cette égalité est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme*.

On a également les *identités de polarisation*, qui permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme euclidienne :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ (u \mid v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right).$$

## II Orthogonalité

$E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et de la norme associée.

### II.1 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

**Définition**

Un vecteur $u$ de $E$ est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
Deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$ sont dits *orthogonaux* si $(u \mid v) = 0$.

**Remarques**

- Ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur $E$.
  Si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
- Si $u \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs $\pm \frac{u}{\|u\|}$ sont unitaires, et ce sont les seuls de la droite $\mathbb{R}u$.
- La définition de l'orthogonalité est symétrique car $(v \mid u) = (u \mid v)$.

– Le seul vecteur $u$ qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
A fortiori, le seul vecteur $u$ qui est orthogonal à tous les vecteurs de $E$ est $u = \overrightarrow{0}$.

**Définition** *(Familles orthogonales ou orthonormales)*

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $E$ est *orthogonale* si les $u_i$ sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite *orthonormale*.

**Définition** *(Bases et repères orthonormaux)*

Soit $(e) = e_1, \ldots, e_n$ une base de $E$.
Si c'est une famille orthonormale, on dit que c'est une *base orthonormale* de $E$.
Un repère cartésien $(\Omega, (e))$ est dit orthonormal si la base $(e)$ est orthonormale.

**Remarques et propriétés**

– La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall\,(i,j) \in I^2,\ (u_i \mid u_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker).

– Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, c'est une famille libre.
C'est le cas en particulier d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ orthonormale.
Si $\dim E = n \geq 1$, une famille orthonormale de $n$ vecteurs est une base orthonormale.

– La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale, pour le produit scalaire canonique.

– Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_n$.
Pour tous vecteurs $u = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $v = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$ de $E$, on pose $(u \mid v) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.
On définit ainsi un produit scalaire sur $E$, pour lequel la base $(e)$ est orthonormale.

– Si la famille $(u_k)_{1\leq k\leq p}$ est orthogonale, alors $\left\| \sum\limits_{k=1}^{p} u_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$ *(Relation de Pythagore.)*
La réciproque n'est vraie que si $p = 2$. Ainsi $(u \mid v) = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

## II.2 Produits scalaires et familles orthonormales

**Proposition** *(Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)*

Dans tout espace vectoriel euclidien $E$, il y a des bases orthonormales.
Plus précisément, soit $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de $E$.
Alors il existe une et une seule base orthonormale $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que :
– $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ \operatorname{Vect}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \operatorname{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$
– $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ (\varepsilon_k \mid e_k) > 0$
Cette base orthonormale $(\varepsilon)$ est obtenue de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|}\, e_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \{2, \ldots, n\},\ \varepsilon_k = \frac{1}{\|u_k\|}\, u_k \quad \text{où} \quad u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j \mid e_k)\, \varepsilon_j$$