



# Table des matières

I	Matrices à coefficients dans $K$ . . . . .	3
I.1	Généralités . . . . .	3
I.2	Matrices particulières . . . . .	3
I.3	Matrices carrées particulières . . . . .	4
II	Opérations sur les matrices . . . . .	5
II.1	L'espace vectoriel des matrices de type $(p,k)$ . . . . .	5
II.2	Produit des matrices . . . . .	5
II.3	L'algèbre des matrices de type $(n,n)$ . . . . .	6
II.4	Calcul des puissances d'une matrice . . . . .	7
II.5	Cas des matrices triangulaires ou diagonales . . . . .	8
II.6	Transposition . . . . .	8
II.7	Matrices symétriques ou antisymétriques . . . . .	9
III	Matrice d'une application linéaire . . . . .	10
III.1	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base . . . . .	10
III.2	Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases . . . . .	10
III.3	Propriétés opératoires . . . . .	12
IV	Changements de bases . . . . .	13
IV.1	Matrices de passage . . . . .	13
IV.2	Changements de matrice pour une application linéaire . . . . .	13
IV.3	Matrices équivalentes et matrices semblables . . . . .	14
V	Trace d'une matrice, d'un endomorphisme . . . . .	15
V.1	Trace d'une matrice . . . . .	15
V.2	Trace d'un endomorphisme . . . . .	15
VI	Opérations élémentaires, calcul du rang . . . . .	17
VI.1	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	17
VI.2	Rang d'une application linéaire . . . . .	17
VI.3	Rang d'une matrice . . . . .	17
VI.4	Matrices échelonnées . . . . .	18
VI.5	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes . . . . .	19
VI.6	Calcul du rang par la méthode du pivot . . . . .	20
VI.7	Calcul de l'inverse par la méthode du pivot . . . . .	21



VII	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	22
VII.1	Définitions . . . . .	22
VII.2	Interprétations d'un système linéaire . . . . .	22
VII.3	Structure de l'ensemble des solutions . . . . .	23
VII.4	Systèmes de Cramer . . . . .	24
VIII	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	26
VIII.1	Opérations élémentaires sur les lignes d'un système . . . . .	26
VIII.2	Méthode du pivot de Gauss . . . . .	26
VIII.3	Trois exemples . . . . .	29

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

### I.1 Généralités

**Définition** (*matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$* )

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers strictement positifs.

Une *matrice*  $A$  de type  $(n, p)$  est une application de  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$  dans  $\mathbb{K}$ .

On note souvent  $a_{i,j}$  l'image du couple  $(i, j)$  par l'application  $A$ .

Les  $a_{i,j}$  sont appelés les *coefficients* de la matrice  $A$ .

On écrit alors  $A = (a_{i,j})_{i=1..n, j=1..p}$ , ou plus simplement  $A = (a_{i,j})$ .

#### Notations

- On note  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de type  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour décrire un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , on dispose les coefficients dans un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, le coefficient  $a_{i,j}$  venant se placer à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne.

- Par exemple, la matrice  $A$  de type  $(3, 2)$  définie par :

$$a_{1,1} = 5, a_{1,2} = 3, a_{2,1} = 0, a_{2,2} = 7, a_{3,1} = 4 \text{ et } a_{3,2} = 1 \text{ se note } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.

On dit donc qu'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est une matrice à  $n$  lignes et à  $p$  colonnes.

### I.2 Matrices particulières

#### – Matrice nulle

La *matrice nulle*  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est définie par :  $\forall (i, j), a_{i,j} = 0$ .

#### – Matrices carrées

On appelle *matrice carrée* d'ordre  $n$  toute matrice de type  $(n, n)$ .

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

#### – Diagonale d'une matrice carrée

Les coefficients  $a_{i,i}$  (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont appelés *coefficients diagonaux*.

Ils forment ce qu'on appelle la *diagonale* de  $A$ .

Les coefficients  $a_{i,j}$  tels que  $i > j$  sont donc *en dessous* de cette diagonale, alors que les coefficients  $a_{i,j}$  tels que  $j > i$  sont *au dessus* de celle-ci.

#### – Matrices-ligne

Les éléments de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  sont appelés *matrices-ligne*.

On peut identifier un élément  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  avec le  $n$ -uplet correspondant  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  de  $\mathbb{K}^p$ .

#### – Matrices-colonne

Les éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  sont appelés *matrices-colonne*.

On identifie parfois une telle matrice-colonne avec un élément de  $\mathbb{K}^n$ .

### I.3 Matrices carrées particulières

#### – Matrices diagonales

Une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *diagonale* si pour tous indices distincts  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = 0$  : seuls sont éventuellement non nuls les éléments diagonaux de  $A$ .

#### – Matrice identité

La *matrice identité d'ordre  $n$*  est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux  $a_{i,i}$  valent 1. Cette matrice est notée  $I_n$ .

On remarque que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = \delta_{i,j}$  (notation de Kronecker).

#### – Matrices scalaires

Les matrices de la forme  $A = \lambda I_n$ , c'est-à-dire les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, sont dites *matrices scalaires*.

#### – Matrices triangulaires

Une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *triangulaire supérieure* si pour tous  $i$  et  $j$  tels que  $i > j$ , alors  $a_{i,j} = 0$ , c'est-à-dire si tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls.

La matrice  $A$  est dite *triangulaire inférieure* si pour tout  $i, j$  tel que  $i < j$  on a  $a_{i,j} = 0$ , c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.

Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

#### – Matrices strictement triangulaires

Une matrice carrée  $A$  est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et si de plus ses coefficients diagonaux sont nuls.

Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est strictement triangulaire supérieure.

## II Opérations sur les matrices

### II.1 L'espace vectoriel des matrices de type $(p,k)$

#### Définition

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , et  $\lambda$  un scalaire.  
 On définit les matrices  $C = A + B$  et  $D = \lambda A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , de la manière suivante :  
 Pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  et  $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

#### Propriétés

- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est un groupe commutatif pour la loi  $+$ .  
 L'élément neutre est la matrice nulle, notée  $0$ .  
 L'opposée de la matrice  $A = (a_{ij})$  est la matrice  $-A = (-a_{ij})$ .
- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension  $np$ .  
 Une base de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , dite *base canonique*, est formée par les  $np$  matrices  $E_{ij}$  (tous les coefficients de  $E_{ij}$  sont nuls sauf celui d'indice  $i, j$  qui vaut 1).  
 Plus précisément, si  $M = (a_{ij})$ , alors  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$ .

### II.2 Produit des matrices

#### Définition

Soient  $A = (a_{ik})$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{kj})$  une matrice de  $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ .  
 On définit la matrice  $C = AB$ , élément de  $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ , de la manière suivante :  
 Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, q\}$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ .

#### Interprétation

Le terme de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de  $C = AB$  est donc obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la  $i$ -ième ligne de  $A$  et dans la  $j$ -ième colonne de  $B$ , selon le schéma ci-dessous (on a représenté en gras les coefficients de  $A$  et de  $B$  utiles au calcul du coefficient  $c_{ij}$ ) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ik}} & \dots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

**Remarque**

On voit bien que le produit  $AB$  de deux matrices  $A$  et  $B$  n'est possible que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que  $A$  et autant de colonnes que  $B$ .

On peut donc résumer en écrivant :

$$[\text{matrice de type } (n, p)] \times [\text{matrice de type } (p, q)] \Rightarrow [\text{matrice de type } (n, q)].$$

**Propriétés du produit**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$  :

- Si les produits  $AB$  et  $AC$  sont possibles, on a :  $A(B + C) = AB + AC$ .
- Si les produits  $AC$  et  $BC$  sont possibles, on a :  $(A + B)C = AC + BC$ .
- Si les produits  $AB$  et  $BC$  sont possibles, on a :  $A(BC) = (AB)C$ .

**Remarques**

- Les produits  $AB$  et  $BA$  ne sont simultanément possibles que si  $A$  est de type  $(n, p)$  et  $B$  de type  $(p, n)$ . Alors  $AB$  est carrée d'ordre  $n$ , tandis que  $BA$  est carrée d'ordre  $p$ .

Si  $n \neq p$ , les matrices  $AB$  et  $BA$ , de formats différents, ne sauraient être égales.

Si  $A$  et  $B$  sont toutes deux carrées d'ordre  $n$ , alors  $AB$  et  $BA$  sont carrées d'ordre  $n$ , mais on a en général  $AB \neq BA$ . Dans le cas contraire, on dit que  $A$  et  $B$  *commutent*.

- L'addition des matrices est une loi de composition interne sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , mais le produit n'est pas une loi sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  sauf si  $n = p$ .

**II.3 L'algèbre des matrices de type (n,n)****Proposition**

- ||  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  est une algèbre sur  $\mathbb{K}$ , non commutative si  $n \geq 2$ .
- || Le neutre multiplicatif est la matrice identité  $I_n$ .

**Remarque importante**

Si  $n \geq 2$ , l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient des *diviseurs de zéro*.

L'égalité  $AB = 0$  n'implique donc pas  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

De même, les égalités  $AB = AC$  ou  $BA = CA$  n'impliquent pas nécessairement  $B = C$ .

**Proposition (Matrices inversibles)**

- || L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour la loi produit, appelé *groupe linéaire* d'indice  $n$ , et noté  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques**

- Bien que le produit dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$  implique l'autre, et donc  $B = A^{-1}$ .
- Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
Alors  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow A$  est simplifiable  $\Leftrightarrow A$  n'est pas un diviseur de 0.

- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on peut utiliser la formule du binôme  $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ , mais à condition que les matrices  $A$  et  $B$  commutent !  
Les matrices scalaires  $\lambda I_n$  commutent avec toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## II.4 Calcul des puissances d'une matrice

### – Utilisation de la formule du binôme

Pour calculer  $A^n$ , il est parfois possible d'écrire  $A = B + C$ , et d'utiliser la formule du binôme, à condition que  $B$  et  $C$  commutent, et que le calcul des puissances de  $B$  et  $C$  soit facile.

Cas fréquent :  $B$  est une matrice scalaire et  $C$  est nilpotente (telle que  $C^m = 0$ ).

On écrira alors, pour tout  $p$  :  $A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} C^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k$ .

### – Utilisation d'une récurrence

Il arrive que les coefficients des premières puissances de  $A$  satisfassent à une formule simple. Il reste à établir si cette formule est vraie pour toutes les puissances de  $A$ , à l'aide d'une récurrence.

### – Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple qu'une matrice  $A$  vérifie  $A^3 - 4A^2 + 5A - I = 0$  (1)

On exprime cette situation en disant que  $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 1$  est un *polynôme annulateur* de  $A$ , l'égalité précédente s'écrivant  $P(A) = 0$ .

(1) s'écrit  $A(A^2 - 4A + 5I) = I$  et prouve que  $A$  est inversible avec  $A^{-1} = A^2 - 4A + 5I$ .

(1) prouve l'existence de suites  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ , et  $(\gamma_n)$  telles que,  $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$  (par récurrence, ou bien en utilisant la division euclidienne  $X^n = Q_n P + R_n$  et en écrivant  $A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$ , avec  $\deg(R_n) \leq 2$ .)

### – Résolution d'un système

Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $X, Y$  deux matrices colonnes inconnues de hauteur  $n$ .

Si le système  $AX = Y$  possède une solution unique  $X$  en fonction de  $Y$ , alors on peut dire que  $A$  est inversible.

La solution doit s'exprimer sous la forme  $X = BY$ , ce qui donne  $B = A^{-1}$ .

### – Exposants négatifs

Supposons qu'on ait trouvé une formule donnant  $A^n = \varphi(n)$  en fonction de l'entier  $n \geq 0$ .

On peut chercher à prouver que cette formule est encore valable pour les exposants négatifs, à condition que  $A$  soit inversible.

Il suffit alors de prouver que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi(n)\varphi(-n) = I_n$ .

## II.5 Cas des matrices triangulaires ou diagonales

### Proposition

Toute matrice  $A$  triangulaire supérieure est inversible  $\Leftrightarrow$  ses coefficients diagonaux  $a_{ii}$  sont non nuls.

$A^{-1}$  est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des  $a_{ii}$ .

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

### Proposition

Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure.

Alors pour tout entier naturel  $k$  (et pour tout entier relatif  $k$  si  $A$  est inversible)  $A^k$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les  $a_{ii}^k$ .

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

### Proposition

Toute matrice  $A$  strictement triangulaire est nilpotente.

Plus précisément, si  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A^n = 0$ .

### Remarques

– Une matrice nilpotente, n'est pas nécessairement strictement triangulaire.

Par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $A^2 = 0$ .

– Si une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est nilpotente, on est certain que  $A^n = 0$ .

Inversement si  $A$  est carrée d'ordre  $n$  et si  $A^n \neq 0$ , toutes ses puissances sont non nulles.

## II.6 Transposition

### Définition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle *transposée* de  $A$  et on note  ${}^tA$  la matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  dont le terme général est  $b_{ij} = a_{ji}$ .

**Exemple :** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  alors  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ .

### Propriétés

– La transposition est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ .

$$\begin{cases} \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB \\ \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), {}^{t^t}A = A \end{cases}$$

– Si on se restreint à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la transposition est donc un automorphisme involutif.

–  $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  (Attention à l'ordre !)

– Si  $A$  est une matrice carrée inversible, alors  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

– Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout entier naturel  $k$ , on a :  ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ .

Si  $A$  est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif  $k$ .



## II.7 Matrices symétriques ou antisymétriques

### Définition

Une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *symétrique* si  ${}^tA = A$ .

Cela équivaut à dire que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{ji} = a_{ij}$ .

Autrement dit  $A$  est symétrique par rapport à sa diagonale.

### Définition

Une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *antisymétrique* si  ${}^tA = -A$ .

Cela équivaut à dire que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{ji} = -a_{ij}$ .

Cela implique en particulier que les coefficients diagonaux de  $A$  sont nuls.

### Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ est symétrique. } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

### Propriétés

- Si  $A$  est inversible et symétrique alors  $A^{-1}$  est symétrique.  
Si  $A$  est inversible et antisymétrique alors  $A^{-1}$  est antisymétrique.
- Si  $A$  est symétrique alors, pour tout entier naturel  $k$ ,  $A^k$  est symétrique.  
Si  $A$  est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif  $k$ .
- Si  $A$  est antisymétrique, ses puissances paires sont symétriques et ses puissances impaires sont antisymétriques.

### Notation

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont symétriques.

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont antisymétriques.

### Proposition

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  est  $\frac{1}{2}n(n+1)$  et celle de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  est  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .

Toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'écrit donc de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique  $S$  et d'une matrice antisymétrique  $A$ .

$S$  et  $A$  sont respectivement données par :  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

### III Matrice d'une application linéaire

#### III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

##### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de  $\dim n \geq 1$ , muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Soit  $(v) = v_1, v_2, \dots, v_p$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $p$ , posons  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ .

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  de terme général  $a_{ij}$ .

$A$  est appelée matrice de la famille  $(v)$  dans la base  $(e)$ .

##### Interprétation et exemple

Avec ces notations, la  $j$ -ième colonne de  $A$  est formée des composantes de  $v$  dans  $(e)$ .

Supposons par exemple que  $(e) = e_1, e_2, e_3$  soit une base de  $E$  (donc  $\dim(E) = 3$ ).

Supposons également que les vecteurs  $v_1, v_2$  soient donnés par :

$$\begin{cases} v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3 \end{cases}$$

Alors la matrice de  $(v) = v_1, v_2$  dans la base  $(e)$  est  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

##### Notation dans un cas particulier

Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, muni d'une base  $(e)$ , on notera  $[u]_e$  la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur  $u$  de  $E$  dans la base  $(e)$ .

#### III.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

##### Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $\dim(E) = p \geq 1$ , et que  $E$  est muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_p$ .

On suppose que  $\dim(F) = n \geq 1$ , et que  $F$  est muni d'une base  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On appelle matrice de  $f$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  la matrice  $A$  de la famille des vecteurs  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$  dans la base  $(\varepsilon)$ .

Cette matrice, élément de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , est notée  $\mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ .

##### Interprétation et exemple

Pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, p\}$ , la  $j$ -ième colonne de  $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$  est formée des composantes du vecteur  $f(e_j)$  dans la base  $(\varepsilon)$ .

Supposons qu'une base de  $E$  soit  $(e) = e_1, e_2, e_3$ , et qu'une base de  $F$  soit  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Soit  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $F$  définie par

$$\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = 7\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \\ f(e_3) = 3\varepsilon_1 \end{cases}$$

Alors la matrice de  $f$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

### Cas particulier : Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , où  $\dim(E) = n \geq 1$ . Si on munit  $E$  de la même base  $(e)$  au départ et à l'arrivée on parle de la matrice de  $f$  dans la base  $(e)$ .

Cette matrice, carrée d'ordre  $n$ , sera notée  $\mathcal{M}(f, (e))$ .

### Proposition (Interprétation matricielle de l'égalité $v = f(u)$ )

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

$E$  est muni d'une base  $(e) = e_1, \dots, e_p$  et  $F$  est muni d'une base  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , de matrice  $A$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$ .

Pour tout  $u$  de  $E$ , l'égalité vectorielle  $v = f(u)$  équivaut à l'égalité matricielle  $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$ .

### Remarque

Réciproquement, si une application  $f : E \rightarrow F$  est telle qu'il existe une matrice  $A$  telle que pour tout vecteur  $u$  de  $E$ ,  $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$ , alors  $f$  est linéaire et  $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ .

### Exemples

Avec l'exemple précédent, si  $(x', y')$  sont les coordonnées dans  $(\varepsilon)$  de  $v = f(u)$ , le vecteur  $u$  ayant lui-même pour coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $(e)$ , on a les équivalences suivantes :

$$v = f(u) \Leftrightarrow [v]_\varepsilon = A[u]_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 7y + 3z \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$$

Réciproquement, soit  $g$  l'application qui envoie tout vecteur  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$  sur le vecteur

$$v = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2 \text{ avec } \begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 9x + 8y + 7z \end{cases}$$

Alors  $g$  est linéaire et sa matrice dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  est  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Cela signifie par exemple que  $g(e_1) = \varepsilon_1 + 9\varepsilon_2$ .

### Remarques

- Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.  
En supposant toujours que  $\dim(E) = p \geq 1$  et  $\dim(F) = n \geq 1$ , l'application de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  qui à une application linéaire  $f$  associe sa matrice dans un couple de bases donné est donc une bijection.
- Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  
Quand on change de base dans  $E$  ou dans  $F$ , la matrice de  $f$  est en général modifiée.  
On analysera plus loin cette dépendance en fonction du couple de bases.
- Cas particulier : la matrice de l'application nulle de  $E$  dans  $F$  est la matrice nulle, et ceci quelque soit le couple de bases.
- La matrice de  $\text{Id}_E$  dans une base  $(e)$  de  $E$  est la matrice identité, quelque soit la base  $(e)$ .  
Mais attention, la matrice de  $\text{Id}_E$  n'est pas la matrice identité si on utilise une certaine base au départ et une autre base à l'arrivée.

- A toute application linéaire  $f$  de  $E$  (de dimension  $p \geq 1$ ) vers  $F$  (de dimension  $n \geq 1$ ) correspond une matrice unique de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  dans un couple de bases donné.
- Inversement,  $A$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  peut représenter une infinité d'applications linéaires :
  - On a en effet le choix des espaces  $E$  (de dimension  $p$ ) et  $F$  (de dimension  $n$ ).
  - On a ensuite le choix d'une base de  $E$  et d'une base de  $F$ .
- Si rien n'est imposé, on prend  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$ , munis de leur base canonique.

### III.3 Propriétés opératoires

#### Proposition (Matrice de $\lambda f + \mu g$ )

On suppose que  $\dim(E) = p \geq 1$  et que  $\dim(F) = n \geq 1$ .

L'application de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  qui à  $f$  associe sa matrice dans un couple de bases est linéaire (c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

$$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g, (e), (\varepsilon)) = \alpha \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon)) + \beta \mathcal{M}(g, (e), (\varepsilon)).$$

#### Proposition (Matrice de la composée $g \circ f$ )

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie, munis des bases  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , et  $(\gamma)$ .

Soit  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, de matrice  $A$  dans les bases  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ .

Soit  $g : F \rightarrow G$ , linéaire, de matrice  $B$  dans les bases  $(\beta)$  et  $(\gamma)$ .

Alors la matrice de  $g \circ f$ , dans les bases  $(\alpha)$  et  $(\gamma)$ , est  $BA$ .

Autrement dit :  $\mathcal{M}(g \circ f, (\alpha), (\gamma)) = \mathcal{M}(g, (\beta), (\gamma)) \times \mathcal{M}(f, (\alpha), (\beta))$ .

#### Proposition (Matrice de $f^{-1}$ )

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension  $n \geq 1$ .

On suppose que  $E$  est muni de la base  $(e)$ , et que  $F$  est muni de la base  $(\varepsilon)$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , de matrice  $A$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$ .

$f$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow A$  est inversible.

La matrice de  $f^{-1}$  dans les bases  $(\varepsilon)$  et  $(e)$  est alors  $A^{-1}$ .

#### Proposition (Matrice de $f^n$ )

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans la base  $(e)$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , la matrice de  $f^k$  dans la base  $(e)$  est  $A^k$ .

Cette propriété s'étend aux exposants  $k$  négatifs si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , c'est-à-dire si  $A$  est inversible.

#### Remarque (Matrice d'une application nilpotente)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans la base  $(e)$ .

Alors  $f$  est nilpotente  $\Leftrightarrow A$  est nilpotente.

Si  $f$  est nilpotente, il existe même une base  $(\varepsilon)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est strictement triangulaire supérieure.