Table des matières

I Espaces vectoriels, algèbres . . . 2
I.1 Structure d'espace vectoriel et d'algèbre . . . 2
I.2 Combinaisons linéaires . . . 2
I.3 Espaces vectoriels et algèbres classiques . . . 3
II Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres . . . 4
II.1 Définitions et caractérisations . . . 4
II.2 Exemples classiques . . . 5
II.3 Opérations entre sous-espaces vectoriels . . . 5
II.4 Sommes directes . . . 6
II.5 Sous-espaces supplémentaires . . . 7
III Applications linéaires . . . 8
III.1 Définitions et notations . . . 8
III.2 Exemples d'applications linéaires . . . 8
III.3 Opérations sur les applications linéaires . . . 9
III.4 Noyau et image . . . 10
III.5 Projections et symétries vectorielles . . . 10
IV Familles libres, génératrices, bases . . . 12
IV.1 Familles libres . . . 12
IV.2 Familles génératrices . . . 13
IV.3 Bases . . . 14
V Espaces vectoriels de dimension finie . . . 15
V.1 Notion de dimension finie . . . 15
V.2 Sous-espaces de dimension finie . . . 16
V.3 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie . . . 17
V.4 Applications linéaires et dimension finie . . . 18
VI Formes linéaires, hyperplans, dualité . . . 19
VI.1 Formes linéaires, espace dual . . . 19
VI.2 Hyperplans et formes linéaires . . . 20
VI.3 Bases duales . . . 20
VI.4 Exemples de bases duales . . . 21
VI.5 Equations d'un sous-espace en dimension finie . . . 22

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

I Espaces vectoriels, algèbres

I.1 Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

Définition

On dit que l'ensemble E est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

– E est muni d'une loi interne + pour laquelle E est un groupe commutatif.

– Il existe une application $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E, dite *loi externe* telle que :

$$\begin{array}{l}\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\\ \forall(u,v)\in E^2\end{array}\begin{cases}(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u, & \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v\\ \alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u, & 1u=u\end{cases}$$

Conventions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Le neutre $\overrightarrow{0}$ de $(E,+)$ est appelé *vecteur nul*.

L'espace vectoriel E est parfois noté $(E, +, \cdot)$ pour rappeler les deux lois.

Proposition *(Règles de calcul dans un espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout scalaire α et tous vecteurs u et v :

– $\alpha u = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = \overrightarrow{0}$.

– $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.

– $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarque *(Dépendance relativement au corps des scalaires)*

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, c'en est également un sur tout sous-corps $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$.

Par exemple un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $\mathbb{K}' \neq \mathbb{K}$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Définition *(Structure d'algèbre)*

On dit qu'un ensemble E est une *algèbre* sur $\mathbb{K}$ si :

– $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

– E est muni d'une loi produit $\times$ pour laquelle $(E, +, \times)$ est un anneau.

– Pour tous u, v de E et tout λ de K :

$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$.

Si de plus la loi $\times$ est commutative, l'algèbre E est dite commutative.

I.2 Combinaisons linéaires

Définition *(Familles à support fini)*

Soit $(A, +)$ un monoïde additif, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A.

On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est à *support fini* si l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ est fini.

Pour une telle famille, on peut donc considérer $\sum_{i\in I} a_i$, qu'on appelle somme à support fini.

On note $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

Définition *(Combinaisons linéaires)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$.
La somme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i$ est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i.

I.3 Espaces vectoriels et algèbres classiques

Définition *(Espace vectoriel produit)*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille de n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on pose :

$$\begin{cases} \forall u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \text{et } \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \end{cases}$$

Cas particulier

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de $\mathbb{K}$.
  C'est même une algèbre commutative.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{les } x_i \in \mathbb{K}\}$.
- Soient X un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

  Soit $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications f de X dans E.
  $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, quand on pose :

  $$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in K, \forall x \in E, \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

  Le vecteur nul est ici l'*application nulle* ω définie par : $\forall x \in E, \omega(x) = \overrightarrow{0}$.
  Si E est une algèbre, on définit un produit dans $\mathcal{F}(X, E)$ en posant :
  $\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x)$.
  $\mathcal{F}(X, E)$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes, p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $n = p$, c'est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative dès que $n \geq 2$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

II Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres

II.1 Définitions et caractérisations

Définition *(Sous-espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.
On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est *stable* pour les deux lois : $\begin{cases} \forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u+v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \end{cases}$
- Muni des lois *induites*, F est un espace vectoriel.

Remarques

- On dit souvent *sous-espace* plutôt que sous-espace vectoriel.
- $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces *triviaux*.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, u+v \in F. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \qquad \lambda u + \mu v \in F. \end{cases}$$

Remarques

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$.

  En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de E appartient à F.

  En effet, tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent au moins $\overrightarrow{0}$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E.

  Pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, et pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ à support fini, la combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ est encore un élément de F.

  On exprime cette propriété en disant que F est *stable par combinaisons linéaires*.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et si G est un sous-espace vectoriel de F, alors G est un sous-espace vectoriel de E.
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pour les mêmes lois, et si $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition *(Sous-algèbre)*

Soit E une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.
On dit que F est une *sous-algèbre* de E si :

- $(F,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
- $(F,+,\times)$ est un sous-anneau de $(E,+,\times)$.

Muni des lois induites, F est donc effectivement une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E une algèbre sur $\mathbb{K}$, de neutre multiplicatif 1_E, et F une partie de E.

F est une sous-algèbre de $E \Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} 1_E \in F \quad (\text{donc } F \neq \emptyset.) \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F. \\ \forall (u,v) \in F^2, uv \in F. \end{cases}$$

II.2 Exemples classiques

- Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, mais pas une sous-algèbre si $n \geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

  Soit $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les applications de I dans $\mathbb{K}$.

  Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$:

  L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

  L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition *(Sous-espace engendré)*

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

On note $\mathrm{Vect}\,(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

$\mathrm{Vect}\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par X.

Si par exemple $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, alors $\mathrm{Vect}\, X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$.

II.3 Opérations entre sous-espaces vectoriels

Proposition *(Intersections de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

Le sous-espace $\mathrm{Vect}\,(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

Proposition *(Sommes de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Soit F l'ensemble des sommes à support fini $\sum_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i \in F_i$.

F est un sous-espace vectoriel de E, appelé *somme* des F_i, et noté $F = \sum_{i\in I} F_i$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

Remarques

– Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F+G=\{u+v, u\in F, v\in G\}$.

– Si F et G sont deux sous-espaces de E, leur réunion $H=F\cup G$ n'est un sous-espace de E que si $F\subset G$ auquel cas $H=G$, ou $G\subset F$ auquel cas $H=F$.

– En général une réunion de sous-espaces de E n'est donc pas un sous-espace de E.
La somme $F=\sum\limits_{i\in I} F_i$ est en fait le plus petit sous-espace de E contenant tous les F_i.
C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des F_i.

II.4 Sommes directes

Définition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F=\sum\limits_{i\in I} F_i$ est *directe* si tout vecteur v de F s'écrit *de manière unique* sous la forme d'une somme à support fini $\sum\limits_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i\in F_i$.
La somme F est alors notée $F=\bigoplus\limits_{i\in I} F_i$.

Exemples des sommes finies

Dans le cas d'une famille finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E, on notera $F=\oplus_{i=1}^n F_i = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n$ la somme des F_i si elle est directe.
On dit également dans ce cas que $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sont *en somme directe*.
Tout vecteur v de F s'écrit alors de manière unique : $v=\sum\limits_{i=1}^n u_i$, où pour tout i, $u_i\in F_i$.
On dit que u_i est la *composante* de u sur F_i relativement à cette somme directe.

Proposition *(Caractérisation des sommes directes)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F=\sum_{i\in I} F_i$ est directe $\Leftrightarrow$:
Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i\in F_i$ pour tout i), $\sum\limits_{i\in I} u_i=\overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i\in I, u_i=\overrightarrow{0}$.

Proposition *(Cas d'une somme directe de deux sous-espaces)*

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $F+G$ est directe$\Leftrightarrow$ $F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$.

Remarques

– Si la somme $\sum_{i\in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I, alors $\sum_{i\in J} F_i$ est directe.
En particulier, pour tous indices distincts i et j, $F_i\cap F_j=\{\overrightarrow{0}\}$.

– La réciproque est fausse. Pour monter que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont en somme directe, avec $n\geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j, $F_i\cap F_j=\{\overrightarrow{0}\}$.
Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n=\{\overrightarrow{0}\}$.

– Une bêtise classique consiste à écrire que $F+G$ est directe $\Leftrightarrow$ $F\cap G$ est vide ! L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en effet *jamais* vide car elle contient toujours $\overrightarrow{0}$.
Il faut en fait vérifier que $F\cap G$ se *réduit* à $\{\overrightarrow{0}\}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

II.5 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E si $E = F \oplus G$.

Cela signifie que tout u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F possède au moins un supplémentaire G dans E.

Remarques

– Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.

– Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E.

Il y a cependant deux cas d'unicité :

- Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $F = \{\overrightarrow{0}\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.

– On ne confondra pas *supplémentaire* et *complémentaire* !

Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

– Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.

– Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

III Applications linéaires

III.1 Définitions et notations

Définition *(Applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Une application f de E dans F est dite *linéaire* si :

$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$

On dit aussi que f est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

Remarques

– f est linéaire de E dans $F \Leftrightarrow$:
$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

– Si f est linéaire, alors $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i\, u_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i\, f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.

– Si f est linéaire de E dans F, alors $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$.
Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Notations et terminologie

– On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

– Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

– Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

– Un *automorphisme* de E est un isomorphisme de E dans lui-même.
On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

– Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

III.2 Exemples d'applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

– L'application nulle de E dans F est linéaire.

– L'application *identité* id_E est un automorphisme de E.

– Pour tout scalaire λ, l'application $h_\lambda : \ u \to \lambda u$ est un endomorphisme de E.
Pour tous scalaires λ et μ : $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.
Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est l'*homothétie* de rapport λ.

– Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
L'application $f \to \varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

◇ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point. L'application qui à une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ associe sa dérivée f' est linéaire de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

La restriction de cette application à $E = \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est un endomorphisme de E.

– Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

L'application $f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

III.3 Opérations sur les applications linéaires

Proposition *(Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et α, β deux scalaires.
Alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F.
On en déduit que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Composition d'applications linéaires*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.

Conséquence *(Structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$)*

Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E.

On en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

En général cette algèbre n'est pas commutative.

Remarque

– Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.

Alors $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E.

– Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$,

à condition que les applications f et g commutent.

– Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E.

Proposition *(Isomorphisme réciproque)*

Soit f un isomorphisme de E sur F.
Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Conséquence *(Structure de groupe de $\mathcal{GL}(E)$)*

Soient f et g deux automorphismes de E.

Alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.

On en déduit que $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Ce groupe est en général non commutatif.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.