



# Table des matières

I	Espaces vectoriels, algèbres . . . . .	2
I.1	Structure d'espace vectoriel et d'algèbre . . . . .	2
I.2	Combinaisons linéaires . . . . .	2
I.3	Espaces vectoriels et algèbres classiques . . . . .	3
II	Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres . . . . .	4
II.1	Définitions et caractérisations . . . . .	4
II.2	Exemples classiques . . . . .	5
II.3	Opérations entre sous-espaces vectoriels . . . . .	5
II.4	Sommes directes . . . . .	6
II.5	Sous-espaces supplémentaires . . . . .	7
III	Applications linéaires . . . . .	8
III.1	Définitions et notations . . . . .	8
III.2	Exemples d'applications linéaires . . . . .	8
III.3	Opérations sur les applications linéaires . . . . .	9
III.4	Noyau et image . . . . .	10
III.5	Projections et symétries vectorielles . . . . .	10
IV	Familles libres, génératrices, bases . . . . .	12
IV.1	Familles libres . . . . .	12
IV.2	Familles génératrices . . . . .	13
IV.3	Bases . . . . .	14
V	Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	15
V.1	Notion de dimension finie . . . . .	15
V.2	Sous-espaces de dimension finie . . . . .	16
V.3	Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	17
V.4	Applications linéaires et dimension finie . . . . .	18
VI	Formes linéaires, hyperplans, dualité . . . . .	19
VI.1	Formes linéaires, espace dual . . . . .	19
VI.2	Hyperplans et formes linéaires . . . . .	20
VI.3	Bases duales . . . . .	20
VI.4	Exemples de bases duales . . . . .	21
VI.5	Equations d'un sous-espace en dimension finie . . . . .	22

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

# I Espaces vectoriels, algèbres

## I.1 Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

### Définition

On dit que l'ensemble  $E$  est un *espace vectoriel* sur  $\mathbb{K}$ , ou un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, si :

- $E$  est muni d'une loi interne  $+$  pour laquelle  $E$  est un groupe commutatif.
- Il existe une application  $(\alpha, u) \rightarrow \alpha u$  de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$ , dite *loi externe* telle que :

$$\begin{cases} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 & (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, & \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \\ \forall (u, v) \in E^2 & \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, & 1u = u \end{cases}$$

### Conventions

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

Les éléments de  $E$  sont appelés *vecteurs* et ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés *scalaires*.

Le neutre  $\vec{0}$  de  $(E, +)$  est appelé *vecteur nul*.

L'espace vectoriel  $E$  est parfois noté  $(E, +, \cdot)$  pour rappeler les deux lois.

### Proposition (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Pour tout scalaire  $\alpha$  et tous vecteurs  $u$  et  $v$  :

- $\alpha u = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$  ou  $u = \vec{0}$ .
- $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$ .
- $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ .

### Remarque (Dépendance relativement au corps des scalaires)

Si  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , c'en est également un sur tout sous-corps  $\mathbb{K}'$  de  $\mathbb{K}$ .

Par exemple un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Si  $\mathbb{K}' \neq \mathbb{K}$ , ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

### Définition (Structure d'algèbre)

On dit qu'un ensemble  $E$  est une *algèbre* sur  $\mathbb{K}$  si :

- $(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
  - $E$  est muni d'une loi produit  $\times$  pour laquelle  $(E, +, \times)$  est un anneau.
  - Pour tous  $u, v$  de  $E$  et tout  $\lambda$  de  $K$  :
- $$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v).$$

Si de plus la loi  $\times$  est commutative, l'algèbre  $E$  est dite commutative.

## I.2 Combinaisons linéaires

### Définition (Familles à support fini)

Soit  $(A, +)$  un monoïde additif, et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $A$ .

On dit que  $(a_i)_{i \in I}$  est à *support fini* si l'ensemble des indices  $i$  tels que  $a_i \neq 0$  est fini.

Pour une telle famille, on peut donc considérer  $\sum_{i \in I} a_i$ , qu'on appelle somme à support fini.

On note  $A^{(I)}$  l'ensemble des familles à support fini d'éléments de  $A$ .

**Définition** (*Combinaisons linéaires*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille à support fini d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

La somme  $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$  est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs  $u_i$  avec les coefficients  $\lambda_i$ .

### I.3 Espaces vectoriels et algèbres classiques

**Définition** (*Espace vectoriel produit*)

Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  une famille de  $n$  espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Soit  $E$  l'ensemble produit  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ .

$E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  quand on pose :

$$\begin{cases} \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \text{ et } \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \end{cases}$$

**Cas particulier**

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $E^n$  est donc muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exemples d'espaces vectoriels**

- $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de  $\mathbb{K}$ .  
C'est même une algèbre commutative.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ les } x_i \in \mathbb{K}\}$ .
- Soient  $X$  un ensemble non vide quelconque et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $\mathcal{F}(X, E)$  l'ensemble de toutes les applications  $f$  de  $X$  dans  $E$ .

$\mathcal{F}(X, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, quand on pose :

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Le vecteur nul est ici l'*application nulle*  $\omega$  définie par :  $\forall x \in E, \omega(x) = \vec{0}$ .

Si  $E$  est une algèbre, on définit un produit dans  $\mathcal{F}(X, E)$  en posant :

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x).$$

$\mathcal{F}(X, E)$  est alors muni d'une structure d'algèbre sur  $\mathbb{K}$ .

- L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.
- L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes,  $p$  colonnes, et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Si  $n = p$ , c'est une algèbre sur  $\mathbb{K}$ , non commutative dès que  $n \geq 2$ .

## II Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres

### II.1 Définitions et caractérisations

#### Définition (Sous-espace vectoriel)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est un *sous-espace vectoriel* de  $E$  si :

- $F$  est *stable* pour les deux lois :  $\begin{cases} \forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \end{cases}$
- Muni des lois *induites*,  $F$  est un espace vectoriel.

#### Remarques

- On dit souvent *sous-espace* plutôt que sous-espace vectoriel.
- $\{\vec{0}\}$  et  $E$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , appelés sous-espaces *triviaux*.

#### Proposition (Caractérisation)

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , et  $F$  une partie de  $E$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u, v) \in F^2, u + v \in F. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \lambda u + \mu v \in F. \end{cases}$$

#### Remarques

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition  $F \neq \emptyset$ .  
En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul  $\vec{0}$  de  $E$  appartient à  $F$ .  
En effet, tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  contiennent au moins  $\vec{0}$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Pour toute famille  $(u_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $F$ , et pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{K}$  à support fini, la combinaison linéaire  $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$  est encore un élément de  $F$ .  
On exprime cette propriété en disant que  $F$  est *stable par combinaisons linéaires*.
- Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et si  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , alors  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pour les mêmes lois, et si  $F \subset E$ , alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

#### Définition (Sous-algèbre)

Soit  $E$  une algèbre sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $F$  est une *sous-algèbre* de  $E$  si :

- $(F, +, \cdot)$  est un sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$ .
- $(F, +, \times)$  est un sous-anneau de  $(E, +, \times)$ .

Muni des lois induites,  $F$  est donc effectivement une algèbre sur  $\mathbb{K}$ .

**Proposition** (*Caractérisation*)

Soient  $E$  une algèbre sur  $\mathbb{K}$ , de neutre multiplicatif  $1_E$ , et  $F$  une partie de  $E$ .

$F$  est une sous-algèbre de  $E \Leftrightarrow :$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_E \in F \quad (\text{donc } F \neq \emptyset.) \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F. \\ \forall (u, v) \in F^2, uv \in F. \end{array} \right.$$

## II.2 Exemples classiques

– Soit  $n$  un entier naturel. L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ , mais pas une sous-algèbre si  $n \geq 1$ .

– Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point.

Soit  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  l'espace vectoriel de toutes les applications de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  :

L'ensemble  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

L'ensemble  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition** (*Sous-espace engendré*)

Soit  $X$  une partie non vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On note  $\text{Vect}(X)$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ .

$\text{Vect}(X)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé *sous-espace engendré* par  $X$ .

Si par exemple  $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ , alors  $\text{Vect } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$ .

## II.3 Opérations entre sous-espaces vectoriels

**Proposition** (*Intersections de sous-espaces vectoriels*)

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarque**

Soit  $X$  une partie non vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Le sous-espace  $\text{Vect}(X)$  est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de  $E$  qui contiennent  $X$ .

C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  qui contiennent  $X$ .

**Proposition** (*Sommes de sous-espaces vectoriels*)

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Soit  $F$  l'ensemble des sommes à support fini  $\sum_{i \in I} u_i$ , où pour tout  $i$  de  $I$ ,  $u_i \in F_i$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé *somme* des  $F_i$ , et noté  $F = \sum_{i \in I} F_i$ .

**Remarques**

- Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$ .
- Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$ , leur réunion  $H = F \cup G$  n'est un sous-espace de  $E$  que si  $F \subset G$  auquel cas  $H = G$ , ou  $G \subset F$  auquel cas  $H = F$ .
- En général une réunion de sous-espaces de  $E$  n'est donc pas un sous-espace de  $E$ .  
La somme  $F = \sum_{i \in I} F_i$  est en fait le plus petit sous-espace de  $E$  contenant tous les  $F_i$ .  
C'est donc le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la réunion des  $F_i$ .

**II.4 Sommes directes**
**Définition**

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
On dit que la somme  $F = \sum_{i \in I} F_i$  est *directe* si tout vecteur  $v$  de  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme à support fini  $\sum_{i \in I} u_i$ , où pour tout  $i$  de  $I$ ,  $u_i \in F_i$ .  
La somme  $F$  est alors notée  $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$ .

**Exemples des sommes finies**

Dans le cas d'une famille finie  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de sous-espaces vectoriels de  $E$ , on notera  $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$  la somme des  $F_i$  si elle est directe.  
On dit également dans ce cas que  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont *en somme directe*.  
Tout vecteur  $v$  de  $F$  s'écrit alors de manière unique :  $v = \sum_{i=1}^n u_i$ , où pour tout  $i$ ,  $u_i \in F_i$ .  
On dit que  $u_i$  est la *composante* de  $u$  sur  $F_i$  relativement à cette somme directe.

**Proposition (Caractérisation des sommes directes)**

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
La somme  $F = \sum_{i \in I} F_i$  est directe  $\Leftrightarrow$  :  
Pour toute famille  $(u_i)$  à support fini ( $u_i \in F_i$  pour tout  $i$ ),  $\sum_{i \in I} u_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i \in I, u_i = \vec{0}$ .

**Proposition (Cas d'une somme directe de deux sous-espaces)**

Soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F + G$  est directe  $\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

**Remarques**

- Si la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe, et si  $J$  est une partie de  $I$ , alors  $\sum_{i \in J} F_i$  est directe.  
En particulier, pour tous indices distincts  $i$  et  $j$ ,  $F_i \cap F_j = \{\vec{0}\}$ .
- La réciproque est fautive. Pour montrer que  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont en somme directe, avec  $n \geq 3$ , il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts  $i$  et  $j$ ,  $F_i \cap F_j = \{\vec{0}\}$ .  
Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \{\vec{0}\}$ .
- Une bêtise classique consiste à écrire que  $F + G$  est directe  $\Leftrightarrow F \cap G$  est vide ! L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est en effet *jamais* vide car elle contient toujours  $\vec{0}$ .  
Il faut en fait vérifier que  $F \cap G$  se réduit à  $\{\vec{0}\}$ .

## II.5 Sous-espaces supplémentaires

### Définition

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* dans  $E$  si  $E = F \oplus G$ .

Cela signifie que tout  $u$  de  $E$  s'écrit d'une manière unique  $u = v + w$ , avec  $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$

### Théorème

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Alors  $F$  possède au moins un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .

### Remarques

- Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.
- Un même sous-espace  $F$  de  $E$  possède en général une infinité de supplémentaires dans  $E$ .

Il y a cependant deux cas d'unicité :

- Si  $F = E$ , le seul supplémentaire de  $F$  dans  $E$  est  $\{\vec{0}\}$ .
  - Si  $F = \{\vec{0}\}$ , le seul supplémentaire de  $F$  dans  $E$  est  $E$  lui-même.
- On ne confondra pas *supplémentaire* et *complémentaire* !

Le complémentaire d'un sous-espace  $F$  de  $E$  est un ensemble sans grand intérêt : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  car il ne contient pas le vecteur nul.

### Exemples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

- Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , les sous-espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.
- Dans l'espace vectoriel  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les sous-espaces  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.



### III Applications linéaires

#### III.1 Définitions et notations

##### Définition (Applications linéaires)

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite *linéaire* si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$$

On dit aussi que  $f$  est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

##### Remarques

–  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F \Leftrightarrow$  :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

– Si  $f$  est linéaire, alors  $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i)$  pour toute combinaison linéaire.

– Si  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ .

Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

##### Notations et terminologie

– On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

– Un *endomorphisme* de  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans lui-même.

On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

– Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

– Un *automorphisme* de  $E$  est un isomorphisme de  $E$  dans lui-même.

On note  $\mathcal{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

– Une *forme linéaire* sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

#### III.2 Exemples d'applications linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

– L'application nulle de  $E$  dans  $F$  est linéaire.

– L'application *identité*  $\text{id}_E$  est un automorphisme de  $E$ .

– Pour tout scalaire  $\lambda$ , l'application  $h_\lambda : u \rightarrow \lambda u$  est un endomorphisme de  $E$ .

Pour tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu : h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$ .

$h_\lambda$  un automorphisme si  $\lambda \neq 0$ , et alors  $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , on dit que  $h_\lambda$  est l'*homothétie* de rapport  $\lambda$ .

– Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$ .

L'application  $f \rightarrow \varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$  est une forme linéaire sur  $E$ .



◇ Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , non réduit à un point. L'application qui à une fonction  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  associe sa dérivée  $f'$  est linéaire de  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

La restriction de cette application à  $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  est un endomorphisme de  $E$ .

– Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{K}^n$ .

L'application  $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{K}^n$ .

### III.3 Opérations sur les applications linéaires

**Proposition** (*Structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$* )

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , et  $\alpha, \beta$  deux scalaires.

Alors  $\alpha f + \beta g$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On en déduit que  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Proposition** (*Composition d'applications linéaires*)

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est linéaire de  $E$  dans  $G$ .

**Conséquence** (*Structure d'algèbre de  $\mathcal{L}(E)$* )

Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$ , alors  $g \circ f$  est un endomorphisme de  $E$ .

On en déduit que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est une algèbre sur  $\mathbb{K}$ .

En général cette algèbre n'est pas commutative.

**Remarque**

– Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $n$  un entier naturel.

Alors  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois) est un endomorphisme de  $E$ .

– Dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ , on peut utiliser la formule du binôme  $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$ ,

à condition que les applications  $f$  et  $g$  commutent.

– Par exemple, les applications  $h_\lambda$  commutent avec tous les endomorphismes de  $E$ .

**Proposition** (*Isomorphisme réciproque*)

Soit  $f$  un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

Sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $E$ .

**Conséquence** (*Structure de groupe de  $\mathcal{GL}(E)$* )

Soient  $f$  et  $g$  deux automorphismes de  $E$ .

Alors  $f^{-1}$  et  $g \circ f$  sont encore des automorphismes de  $E$ .

On en déduit que  $\mathcal{GL}(E)$  est un groupe pour la loi de composition des applications.

Ce groupe est en général non commutatif.