Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels, algèbres

I.1 Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

Définition

On dit que l'ensemble E est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si :

– E est muni d'une loi interne $+$ pour laquelle E est un groupe commutatif.

– Il existe une application $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E, dite *loi externe* telle que :

$$\begin{matrix}\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2 \\ \forall(u,v)\in E^2\end{matrix} \quad \begin{cases}(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, & \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \\ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, & 1u = u\end{cases}$$

Conventions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Le neutre $\overrightarrow{0}$ de $(E,+)$ est appelé *vecteur nul*.

L'espace vectoriel E est parfois noté $(E, +, \cdot)$ pour rappeler les deux lois.

Proposition *(Règles de calcul dans un espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout scalaire α et tous vecteurs u et v :

– $\alpha u = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $u = \overrightarrow{0}$.

– $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.

– $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarque *(Dépendance relativement au corps des scalaires)*

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, c'en est également un sur tout sous-corps $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$.

Par exemple un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $\mathbb{K}' \neq \mathbb{K}$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Définition *(Structure d'algèbre)*

On dit qu'un ensemble E est une *algèbre* sur $\mathbb{K}$ si :

– $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

– E est muni d'une loi produit $\times$ pour laquelle $(E, +, \times)$ est un anneau.

– Pour tous u, v de E et tout λ de K :

$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$.

Si de plus la loi $\times$ est commutative, l'algèbre E est dite commutative.

I.2 Combinaisons linéaires

Définition *(Familles à support fini)*

Soit $(A, +)$ un monoïde additif, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A.

On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est à *support fini* si l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ est fini.

Pour une telle famille, on peut donc considérer $\sum_{i\in I} a_i$, qu'on appelle somme à support fini.

On note $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A.

Définition *(Combinaisons linéaires)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$.
La somme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i$ est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i.

I.3 Espaces vectoriels et algèbres classiques

Définition *(Espace vectoriel produit)*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille de n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on pose :
$$\begin{cases} \forall u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in E, \forall\lambda \in \mathbb{K} \\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \text{et } \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) \end{cases}$$

Cas particulier

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^n est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de $\mathbb{K}$.
  C'est même une algèbre commutative.
- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \text{les } x_i \in \mathbb{K}\}$.
- Soient X un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Soit $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications f de X dans E.
  $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, quand on pose :
  $$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall\lambda \in K, \forall x \in E, \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$
  Le vecteur nul est ici l'*application nulle* ω définie par : $\forall x \in E, \omega(x) = \overrightarrow{0}$.
  Si E est une algèbre, on définit un produit dans $\mathcal{F}(X, E)$ en posant :
  $\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x)$.
  $\mathcal{F}(X, E)$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes, p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $n = p$, c'est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative dès que $n \geq 2$.

II Sous-espaces vectoriels et sous-algèbres

II.1 Définitions et caractérisations

Définition *(Sous-espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

– F est *stable* pour les deux lois : $\begin{cases} \forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u+v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \end{cases}$

– Muni des lois *induites*, F est un espace vectoriel.

Remarques

– On dit souvent *sous-espace* plutôt que sous-espace vectoriel.

– $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces *triviaux*.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, u+v \in F. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \qquad \lambda u + \mu v \in F. \end{cases}$$

Remarques

– Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$.

En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de E appartient à F.

En effet, tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent au moins $\overrightarrow{0}$.

– Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Pour toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, et pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ à support fini, la combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ est encore un élément de F.

On exprime cette propriété en disant que F est *stable par combinaisons linéaires*.

– Si F est un sous-espace vectoriel de E et si G est un sous-espace vectoriel de F, alors G est un sous-espace vectoriel de E.

– Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pour les mêmes lois, et si $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition *(Sous-algèbre)*

Soit E une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E.

On dit que F est une *sous-algèbre* de E si :

– $(F,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

– $(F,+,\times)$ est un sous-anneau de $(E,+,\times)$.

Muni des lois induites, F est donc effectivement une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Caractérisation)*

Soient E une algèbre sur $\mathbb{K}$, de neutre multiplicatif 1_E, et F une partie de E.

F est une sous-algèbre de $E \Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} 1_E \in F \quad (\text{donc } F \neq \emptyset.) \\ \forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F. \\ \forall (u,v) \in F^2, uv \in F. \end{cases}$$

II.2 Exemples classiques

- Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, mais pas une sous-algèbre si $n \geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

  Soit $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les applications de I dans $\mathbb{K}$.

  Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$:

  L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

  L'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition *(Sous-espace engendré)*

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

On note $\mathrm{Vect}\,(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

$\mathrm{Vect}\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par X.

Si par exemple $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, alors $\mathrm{Vect}\,X = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

II.3 Opérations entre sous-espaces vectoriels

Proposition *(Intersections de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

Le sous-espace $\mathrm{Vect}\,(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X.

Proposition *(Sommes de sous-espaces vectoriels)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

Soit F l'ensemble des sommes à support fini $\sum_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i \in F_i$.

F est un sous-espace vectoriel de E, appelé *somme* des F_i, et noté $F = \sum_{i\in I} F_i$.

Remarques

– Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.

– Si F et G sont deux sous-espaces de E, leur réunion $H = F \cup G$ n'est un sous-espace de E que si $F \subset G$ auquel cas $H = G$, ou $G \subset F$ auquel cas $H = F$.

– En général une réunion de sous-espaces de E n'est donc pas un sous-espace de E.

La somme $F = \sum\limits_{i\in I} F_i$ est en fait le plus petit sous-espace de E contenant tous les F_i.

C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des F_i.

II.4 Sommes directes

Définition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F = \sum\limits_{i\in I} F_i$ est *directe* si tout vecteur v de F s'écrit *de manière unique* sous la forme d'une somme à support fini $\sum\limits_{i\in I} u_i$, où pour tout i de I, $u_i \in F_i$.

La somme F est alors notée $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$.

Exemples des sommes finies

Dans le cas d'une famille finie $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E, on notera $F = \oplus_{i=1}^n F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ la somme des F_i si elle est directe.

On dit également dans ce cas que $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sont *en somme directe*.

Tout vecteur v de F s'écrit alors de manière unique : $v = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, où pour tout i, $u_i \in F_i$.

On dit que u_i est la *composante* de u sur F_i relativement à cette somme directe.

Proposition *(Caractérisation des sommes directes)*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.

La somme $F = \sum_{i\in I} F_i$ est directe $\Leftrightarrow$:

Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i \in F_i$ pour tout i), $\sum\limits_{i\in I} u_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall i \in I, u_i = \overrightarrow{0}$.

Proposition *(Cas d'une somme directe de deux sous-espaces)*

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $F + G$ est directe$\Leftrightarrow$ $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

Remarques

– Si la somme $\sum_{i\in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I, alors $\sum_{i\in J} F_i$ est directe.

En particulier, pour tous indices distincts i et j, $F_i \cap F_j = \{\overrightarrow{0}\}$.

– La réciproque est fausse. Pour monter que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont en somme directe, avec $n \geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j, $F_i \cap F_j = \{\overrightarrow{0}\}$.

Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n = \{\overrightarrow{0}\}$.

– Une bêtise classique consiste à écrire que $F + G$ est directe $\Leftrightarrow$ $F \cap G$ est vide ! L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en effet *jamais* vide car elle contient toujours $\overrightarrow{0}$. Il faut en fait vérifier que $F \cap G$ se *réduit* à $\{\overrightarrow{0}\}$.

II.5 Sous-espaces supplémentaires

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E si $E = F \oplus G$.

Cela signifie que tout u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F possède au moins un supplémentaire G dans E.

Remarques

– Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.

– Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E.

Il y a cependant deux cas d'unicité :

- Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $F = \{\overrightarrow{0}\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.

– On ne confondra pas *supplémentaire* et *complémentaire* !

Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

– Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.

– Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

III Applications linéaires

III.1 Définitions et notations

Définition *(Applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application f de E dans F est dite *linéaire* si :
$\forall (u,v)\in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} f(u+v)=f(u)+f(v) \\ f(\lambda u)=\lambda f(u) \end{cases}$
On dit aussi que f est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

Remarques

– f est linéaire de E dans F $\Leftrightarrow$:
  $\forall (u,v)\in E^2, \forall (\alpha,\beta)\in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$.
– Si f est linéaire, alors $f\left(\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\, u_i\right)=\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\, f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.
– Si f est linéaire de E dans F, alors $f(\overrightarrow{0}_E)=\overrightarrow{0}_F$.
  Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Notations et terminologie

– On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
– Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
– Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
– Un *automorphisme* de E est un isomorphisme de E dans lui-même.
  On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
– Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

III.2 Exemples d'applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

– L'application nulle de E dans F est linéaire.
– L'application *identité* id_E est un automorphisme de E.
– Pour tout scalaire λ, l'application $h_\lambda :\ u \to \lambda u$ est un endomorphisme de E.
  Pour tous scalaires λ et μ : $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.
  h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1}=h_{1/\lambda}$.
  Si $\lambda\neq 0$, on dit que h_λ est l'*homothétie* de rapport λ.
– Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
  L'application $f \to \varphi(f)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.

◇ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point. L'application qui à une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ associe sa dérivée f' est linéaire de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

La restriction de cette application à $E = \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ est un endomorphisme de E.

– Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

L'application $f :\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

III.3 Opérations sur les applications linéaires

Proposition *(Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, et α, β deux scalaires.
Alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F.
On en déduit que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition *(Composition d'applications linéaires*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G.

Conséquence *(Structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$)*

Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E.

On en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

En général cette algèbre n'est pas commutative.

Remarque

– Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.

Alors $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E.

– Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$,

à condition que les applications f et g commutent.

– Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E.

Proposition *(Isomorphisme réciproque)*

Soit f un isomorphisme de E sur F.
Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Conséquence *(Structure de groupe de $\mathcal{GL}(E)$)*

Soient f et g deux automorphismes de E.

Alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E.

On en déduit que $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Ce groupe est en général non commutatif.