# Table des matières

# I Intégrale des fonctions en escaliers

Dans ce chapitre, $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

## I.1 Fonctions en escaliers

**Définition** *(subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
La quantité $h = \max(x_{k+1} - x_k)$ est appelée le *pas* de la subdivision.

**Remarque**

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que $\sigma$ est *plus fine* que $\sigma'$ si le support de $\sigma$ contient celui de $\sigma'$.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de $\sigma$ et de $\sigma'$ est plus fine que chacune des subdivisions $\sigma$ et $\sigma'$. Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$, alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

**Définition** *(applications en escaliers sur un segment)*

Soit $\varphi$ une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $\varphi$ est *en escaliers* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ de $[a, b]$ et $n$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que :
$\forall\, k = 0, \ldots, n-1,\ \forall\, t \in \,]x_k, x_{k+1}[,\ \varphi(t) = \lambda_k$.
On dit alors que la subdivision $\sigma$ est *adaptée* (ou encore *subordonnée*) à $\varphi$.
On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

**Exemple**

La figure 1 représente une fonction en escaliers $\varphi$ sur le segment $[a, b]$. On n'a pas représenté les valeurs de $\varphi$ aux points $x_k$, car ces valeurs sont sans importance.

**Définition** *(applications en escaliers sur un intervalle quelconque)*

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $\varphi$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que $\varphi$ est en escaliers sur $I$ s'il existe un segment $[a, b]$ de $I$ tel que :
- L'application $\varphi$ est nulle en dehors du segment $[a, b]$.
- La restriction $\psi$ de $\varphi$ à $[a, b]$ est en escaliers sur $[a, b]$.
  Une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $\psi$ est encore dite adaptée à $\varphi$.

**Remarques et propriétés**

- Dans la pratique, on considérera surtout des fonctions en escaliers sur un segment $[a, b]$.
- Si $\sigma$ est une subdivision adaptée à $\varphi$, toute subdivision plus fine que $\sigma$ est adaptée à $\varphi$.
- Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
- Si $\varphi, \psi$ sont en escaliers sur $[a, b]$, alors : $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\varphi + \beta\psi$ est en escaliers sur $[a, b]$.
  Plus généralement, toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers est encore en escaliers.
  De même $\varphi\psi$ est en escaliers sur $[a, b]$ (comme tout produit de fonctions en escaliers.)

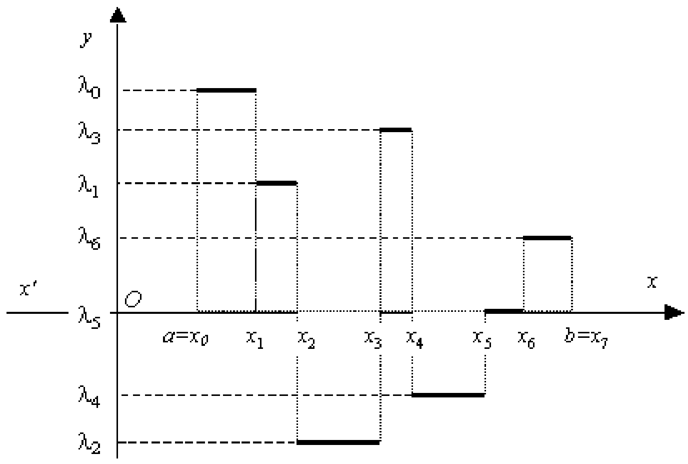


Fig. 1 – Une fonction en escaliers

## I.2 Intégrale des fonctions en escaliers

### Définition

Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\forall t \in ]x_k, x_{k+1}[$, $\varphi(t) = \lambda_k$.
Le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\lambda_k$ est appelé *intégrale* de $\varphi$ et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$.

### Interprétation graphique

Comme le montre la figure 2, l'intégrale de $\varphi$ est égale à la somme des "aires" algébriques (comptées positivement ou négativement selon le signe des $\lambda_k$) des zones rectangulaires définies par le graphe de $\varphi$ :

### Remarques et propriétés

- L'intégrale de $\varphi$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à $\varphi$ choisie.
- Si $\varphi$ est constante égale à $\lambda$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = (b - a)\lambda$.
- Soient $\varphi$ en escaliers sur $[a, b]$ et $\psi$ ne différant de $\varphi$ qu'en un nombre fini de points.
  Alors $\psi$ est en escaliers sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \varphi$.
- Soit $\varphi$ une application nulle sur $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points.
  Alors $\varphi$ est élément de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = 0$.
- Soit $\varphi$ un élément de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $c$ est un élément de $]a, b[$.
  Alors les restrictions de $\varphi$ à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.

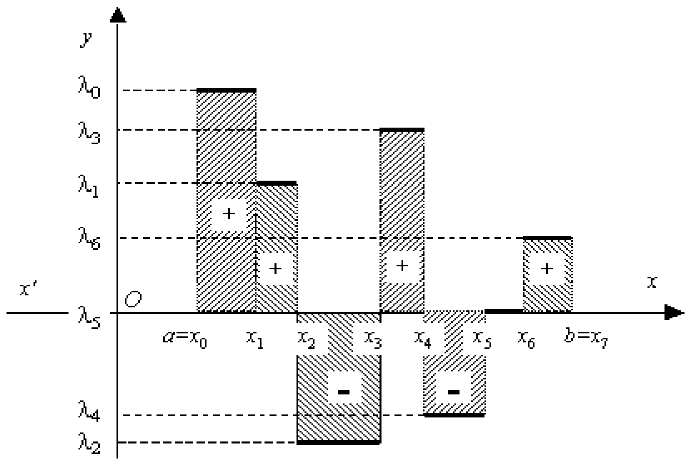


Fig. 2 – Intégrale d'une fonction en escaliers

**Linéarité de l'intégrale**

Soient $\varphi, \psi$ deux applications en escaliers sur $[a, b]$, et soient $\alpha, \beta$ deux réels.

Alors on a l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$.

L'application qui à $\varphi$ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ est donc *linéaire* de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

**Positivité et croissance**

- Soient $\varphi, \psi$ dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. Si $\varphi \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$. Si $\varphi \leq \psi$ alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.
- Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors $|\varphi| : t \mapsto |\varphi(t)| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$.
- Si $\varphi$ est en escaliers de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq (b - a) \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

# II Intégrale des fonctions continues par morceaux

## II.1 Fonctions continues par morceaux

**Définition**

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ (dite adaptée à $f$, ou encore subordonnée à $f$) telle que, pour tout $k$ de $\{0, \ldots, n-1\}$ :

– La restriction $f_k$ de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.

– Cette restriction est prolongeable par continuité aux points $x_k$ et $x_{k+1}$.

On note $\mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux sur $[a,b]$.

**Remarques et propriétés**

– Si $\sigma$ est une subdivision adaptée à $f$, toute subdivision plus fine que $\sigma$ est adaptée à $f$.

– Dire que $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, c'est dire que $f$ n'a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur $[a,b]$, et que toutes sont de *première espèce* : en chaque point de discontinuité, il y a une limite à gauche et une limite à droite, et ces limites sont finies.

– Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.
Toute application continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux.
Toute application en escaliers sur $[a,b]$ est continue par morceaux.

– Soient $f, g$ deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$.
Pour tous scalaires $\alpha$ et $\beta$, l'application $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
De même, l'application $fg$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

– Soit $I$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit $f$ une application définie sur $I$, à valeurs réelles.
On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ si elle l'est sur tout segment de $I$.
Par exemple, l'application "partie entière" est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

– Si $f$ est continue par morceaux il en est de même de l'application $|f| : x \mapsto |f(x)|$.

## II.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

**Proposition** *(approximation par des applications en escaliers)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux applications en escaliers $\varphi, \psi$ telles que :

– Pour tout $x$ de $[a,b]$, $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$.

– Pour tout $x$ de $[a,b]$, $0 \le \psi(x) - \varphi(x) \le \varepsilon$.

**Proposition**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.
Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escaliers telles que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{[a,b]}|f-\varphi_n|\right)=0$.
On dit que la suite $(\varphi_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.
D'après la proposition précédente, on peut choisir la suite $(\varphi_n)$ telle que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $\varphi_n \leq f$ (ou au contraire telle que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $f \leq \varphi_n$.)

**Proposition** *(intégrale sur $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.
Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escaliers, uniformément convergente vers $f$ sur $[a,b]$.
Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]}\varphi_n$ est convergente. On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n$.
Cette quantité est appelée intégrale de $f$ sur $[a,b]$.

**Remarques**

– La valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)$ de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ utilisée pour approcher $f$.
– Si l'application $f$ est en escaliers sur $[a,b]$ elle est continue par morceaux.
L'intégrale de $f$ est évidemment la même selon les deux points de vue.
– Si $f$ est à valeurs positives, la suite $(\varphi_n)$ peut être choisie telle que $\varphi_n \geq 0$ pour tout $n$.

**Interprétation en terme d'aire**

Soit $f$ une application continue par morceaux sur $[a,b]$. L'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ représente l'aire algébrique du domaine situé entre la courbe $y=f(x)$ et l'axe $Ox$, cette "aire" étant comptée positivement sur les intervalles où $f\geq 0$ et négativement sur les intervalles où $f \leq 0$ (voir figure 3).

Numériquement, le résultat est exprimé en *unités d'aire* (ua).

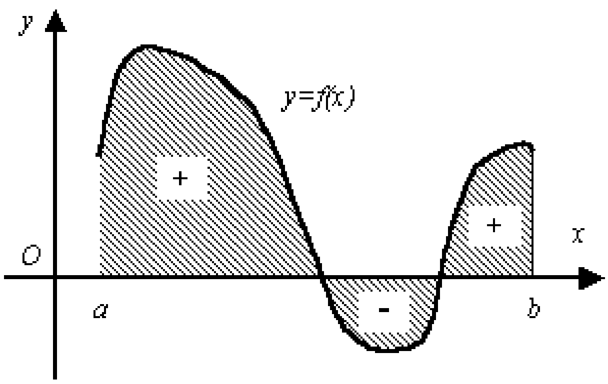


FIG. 3 – Interprétation de l'intégrale

## II.3 Propriétés de l'intégrale

Elles découlent des propriétés analogues de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ par passage à la limite.

**Proposition** *(linéarité de l'intégrale)*

Soient $f, g$ deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$, et soient $\alpha, \beta$ deux scalaires.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$.

Ainsi l'application qui à $f$ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est *linéaire* de $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

**Proposition** *(positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient $f$ et $g$ deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$ (on rappelle que $a < b$.)

- Si $f$ est positive ou nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

**Proposition**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

On suppose que l'application $f$ garde un signe constant sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.

◇ Si $f$ est continue en un point $x_0$ de $[a,b]$, alors $f(x_0) = 0$.

◇ En particulier, si $f$ est continue sur $[a,b]$, alors $f$ est identiquement nulle.

**Remarques**

- Si $f \geq 0$ est continue en un point $x_0$ de $[a,b]$ et si $f(x_0) > 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

  Donc si $f$ est continue $\geq 0$ mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.
- Si $f$ et $g$ sont continues, si $f \leq g$ sur $[a,b]$ et si $f \neq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$.

**Proposition** *(inégalité de la moyenne)*

Soient $f, g$ deux applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

En particulier : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

**Définition** *(valeur moyenne d'une application)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

La quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ est appelé *valeur moyenne* de $f$ sur $[a,b]$.

**Remarques**

- On a $\inf\limits_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \sup\limits_{[a,b]} f$. Si $f$ est continue, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (b-a)f(c)$.
- La valeur moyenne $\lambda$ de $f$ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lambda$ : c'est le réel par lequel on peut remplacer $f$ sans changer l'intégrale de $f$.
  Sur la figure 4 les deux aires hachurées sont donc égales.

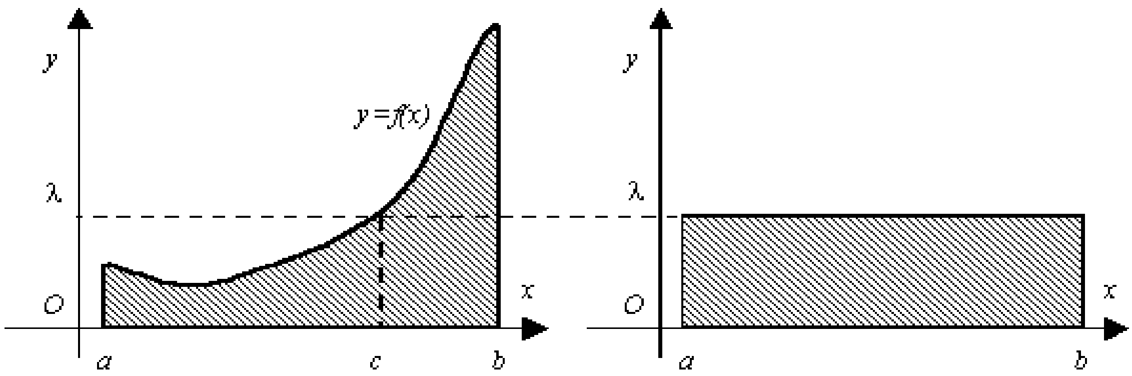


Fig. 4 – Interprétation de la valeur moyenne

**Proposition** *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues par morceaux. Alors on a $\left(\displaystyle\int_{[a,b]} f\, g\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$.

Si $f, g$ sont continues, il y a égalité$\Leftrightarrow$ $f, g$ sont proportionnelles.

**Proposition** *(relation de Chasles)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, et soit $c$ un point de $]a,b[$.

Alors $f$ est continue par morceaux sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et on a : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

**Remarques diverses**

- **Extension aux applications définies "presque partout"**
  Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si $g$ ne diffère de $f$ qu'en un nombre fini de points, alors $g$ est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.
  Si $f$ est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si la restriction de $f$ à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$, on peut donc encore définir l'intégrale de $f$, en donnant à $f$ une valeur quelconque en chacun des $x_k$.
- **Invariance de l'intégrale par translation**
  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Soit $\alpha$ un nombre réel.