Table des matières

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

I Intégrale des fonctions en escaliers

Dans ce chapitre, $[a, b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

I.1 Fonctions en escaliers

Définition *(subdivisions)*

On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $(x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$.
L'ensemble $\{a = x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$ est appelé le *support* de la subdivision.
La quantité $h = \max(x_{k+1} - x_k)$ est appelée le *pas* de la subdivision.

Remarque

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

On dit que σ est *plus fine* que σ' si le support de σ contient celui de σ'.

La subdivision notée $\sigma \cup \sigma'$ et dont le support est la réunion de ceux de σ et de σ' est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'. Réciproquement si une subdivision de $[a, b]$ est plus fine que σ et σ', alors elle est plus fine que la subdivision $\sigma \cup \sigma'$.

Définition *(applications en escaliers sur un segment)*

Soit φ une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que φ est *en escaliers* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ et n réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que :
$\forall\, k = 0, \ldots, n-1,\ \forall\, t \in \,]x_k, x_{k+1}[,\ \varphi(t) = \lambda_k$.
On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* (ou encore *subordonnée*) à φ.
On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

Exemple

La figure 1 représente une fonction en escaliers φ sur le segment $[a, b]$. On n'a pas représenté les valeurs de φ aux points x_k, car ces valeurs sont sans importance.

Définition *(applications en escaliers sur un intervalle quelconque)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit φ une application de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que φ est en escaliers sur I s'il existe un segment $[a, b]$ de I tel que :
- L'application φ est nulle en dehors du segment $[a, b]$.
- La restriction ψ de φ à $[a, b]$ est en escaliers sur $[a, b]$.
  Une subdivision de $[a, b]$ adaptée à ψ est encore dite adaptée à φ.

Remarques et propriétés

- Dans la pratique, on considérera surtout des fonctions en escaliers sur un segment $[a, b]$.
- Si σ est une subdivision adaptée à φ, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à φ.
- Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
- Si φ, ψ sont en escaliers sur $[a, b]$, alors : $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\varphi + \beta\psi$ est en escaliers sur $[a, b]$.
  Plus généralement, toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers est encore en escaliers.
  De même $\varphi\psi$ est en escaliers sur $[a, b]$ (comme tout produit de fonctions en escaliers.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

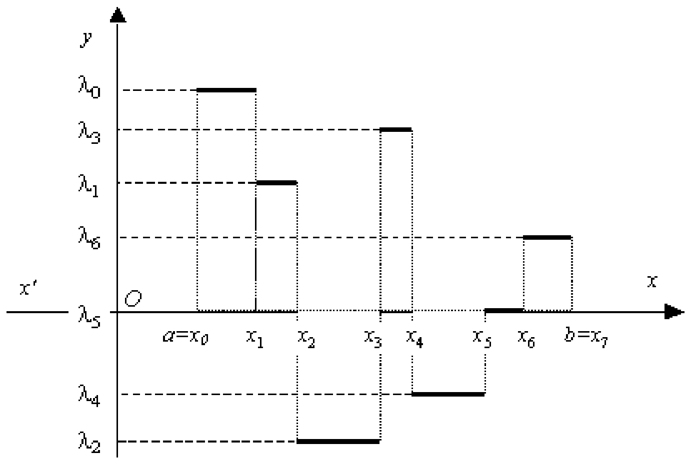

Fig. 1 – Une fonction en escaliers

I.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_k)_{0 \le k \le n}$ une subdivision adaptée.
On suppose que : $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall t \in]x_k, x_{k+1}[,\ \varphi(t) = \lambda_k$.
Le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\lambda_k$ est appelé *intégrale* de φ et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$.

Interprétation graphique

Comme le montre la figure 2, l'intégrale de φ est égale à la somme des “aires” algébriques (comptées positivement ou négativement selon le signe des λ_k) des zones rectangulaires définies par le graphe de φ :

Remarques et propriétés

- L'intégrale de φ ne dépend pas de la subdivision adaptée à φ choisie.
- Si φ est constante égale à λ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = (b-a)\lambda$.
- Soient φ en escaliers sur $[a,b]$ et ψ ne différant de φ qu'en un nombre fini de points.
  Alors ψ est en escaliers sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \varphi$.
- Soit φ une application nulle sur $[a,b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points.
  Alors φ est élément de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = 0$.
- Soit φ un élément de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Soit c est un élément de $]a,b[$.
  Alors les restrictions de φ à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escaliers et : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

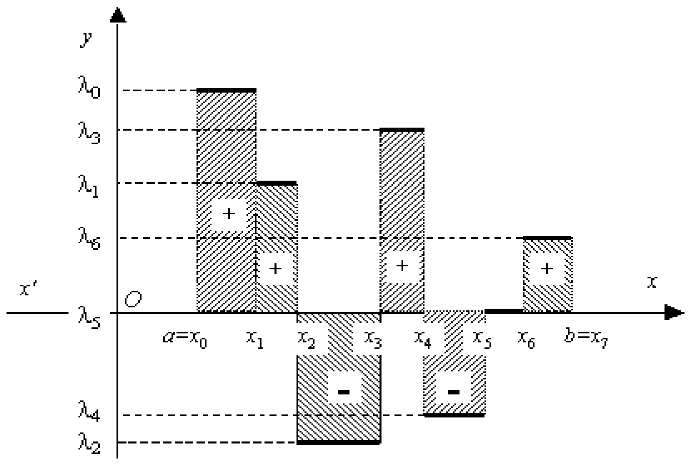

FIG. 2 – Intégrale d'une fonction en escaliers

Linéarité de l'intégrale

Soient φ, ψ deux applications en escaliers sur $[a, b]$, et soient α, β deux réels.

Alors on a l'égalité $\displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$.

L'application qui à φ associe $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ est donc *linéaire* de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Positivité et croissance

- Soient φ, ψ dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$. Si $\varphi \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$. Si $\varphi \leq \psi$ alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.
- Si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors $|\varphi| : t \mapsto |\varphi(t)| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$.
- Si φ est en escaliers de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq (b - a) \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

II Intégrale des fonctions continues par morceaux

II.1 Fonctions continues par morceaux

Définition

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$ (dite adaptée à f, ou encore subordonnée à f) telle que, pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$:

– La restriction f_k de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.

– Cette restriction est prolongeable par continuité aux points x_k et x_{k+1}.

On note $\mathcal{C}_m([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues par morceaux sur $[a,b]$.

Remarques et propriétés

– Si σ est une subdivision adaptée à f, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.

– Dire que f est continue par morceaux sur $[a,b]$, c'est dire que f n'a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur $[a,b]$, et que toutes sont de *première espèce* : en chaque point de discontinuité, il y a une limite à gauche et une limite à droite, et ces limites sont finies.

– Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.
Toute application continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux.
Toute application en escaliers sur $[a,b]$ est continue par morceaux.

– Soient f, g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$.
Pour tous scalaires α et β, l'application $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
De même, l'application fg est continue par morceaux sur $[a,b]$.

– Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit f une application définie sur I, à valeurs réelles.
On dit que f est continue par morceaux sur I si elle l'est sur tout segment de I.
Par exemple, l'application "partie entière" est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

– Si f est continue par morceaux il en est de même de l'application $|f| : x \mapsto |f(x)|$.

II.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition *(approximation par des applications en escaliers)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux applications en escaliers φ, ψ telles que :

– Pour tout x de $[a,b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$.

– Pour tout x de $[a,b]$, $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.
Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions en escaliers telles que $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\sup\limits_{[a,b]}|f-\varphi_n|\Big) = 0$.
On dit que la suite (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
D'après la proposition précédente, on peut choisir la suite (φ_n) telle que pour tout n de $\mathbb{N}$ on ait $\varphi_n \leq f$ (ou au contraire telle que pour tout n de $\mathbb{N}$ on ait $f \leq \varphi_n$.)

Proposition *(intégrale sur $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.
Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escaliers, uniformément convergente vers f sur $[a, b]$.
Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi_n$ est convergente. On pose $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$.
Cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a, b]$.

Remarques

– La valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la suite (φ_n) de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ utilisée pour approcher f.

– Si l'application f est en escaliers sur $[a, b]$ elle est continue par morceaux.
L'intégrale de f est évidemment la même selon les deux points de vue.

– Si f est à valeurs positives, la suite (φ_n) peut être choisie telle que $\varphi_n \geq 0$ pour tout n.

Interprétation en terme d'aire

Soit f une application continue par morceaux sur $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ représente l'aire algébrique du domaine situé entre la courbe $y = f(x)$ et l'axe Ox, cette "aire" étant comptée positivement sur les intervalles où $f \geq 0$ et négativement sur les intervalles où $f \leq 0$ (voir figure 3).

Numériquement, le résultat est exprimé en *unités d'aire* (ua).

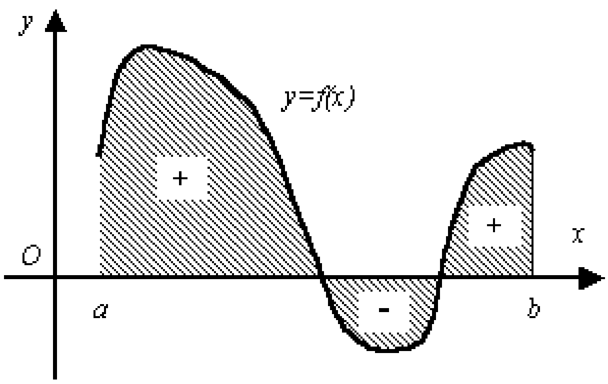

Fig. 3 – Interprétation de l'intégrale

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

II.3 Propriétés de l'intégrale

Elles découlent des propriétés analogues de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ par passage à la limite.

Proposition *(linéarité de l'intégrale)*

Soient f,g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$, et soient α,β deux scalaires.

Alors on a l'égalité : $\displaystyle\int_{[a,b]}(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_{[a,b]} f+\beta\int_{[a,b]} g$.

Ainsi l'application qui à f associe $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est *linéaire* de $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition *(positivité et croissance de l'intégrale)*

Soient f et g deux applications continues par morceaux sur $[a,b]$ (on rappelle que $a<b$.)

- Si f est positive ou nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f\geq 0$.
- Si $f\leq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f\leq\int_{[a,b]} g$.

Proposition

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

On suppose que l'application f garde un signe constant sur $[a,b]$ et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f=0$.

◇ Si f est continue en un point x_0 de $[a,b]$, alors $f(x_0)=0$.

◇ En particulier, si f est continue sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle.

Remarques

- Si $f\geq 0$ est continue en un point x_0 de $[a,b]$ et si $f(x_0)>0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f>0$.

  Donc si f est continue ≥ 0 mais non identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f>0$.
- Si f et g sont continues, si $f\leq g$ sur $[a,b]$ et si $f\neq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f<\int_{[a,b]} g$.

Proposition *(inégalité de la moyenne)*

Soient f,g deux applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Alors on a l'inégalité : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right|\leq\sup_{[a,b]}|f|\int_{[a,b]}|g|$.

En particulier : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right|\leq\int_{[a,b]}|f|\leq(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Définition *(valeur moyenne d'une application)*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

La quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ est appelé *valeur moyenne* de f sur $[a,b]$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Remarques

– On a $\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]} f$. Si f est continue, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $\int_{[a,b]} f = (b-a)f(c)$.

– La valeur moyenne λ de f vérifie l'égalité $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lambda$: c'est le réel par lequel on peut remplacer f sans changer l'intégrale de f.
Sur la figure 4 les deux aires hachurées sont donc égales.

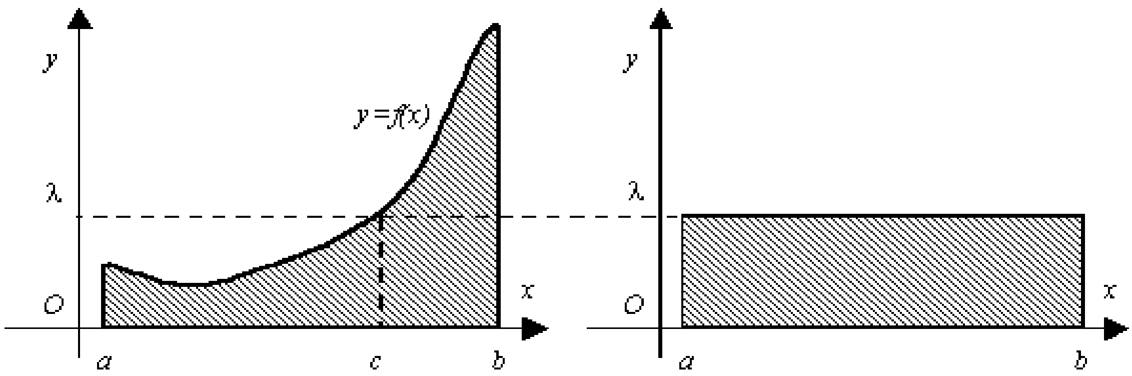

Fig. 4 – Interprétation de la valeur moyenne

Proposition *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues par morceaux. Alors on a $\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$.

Si f, g sont continues, il y a égalité$\Leftrightarrow$ f, g sont proportionnelles.

Proposition *(relation de Chasles)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux, et soit c un point de $]a,b[$.

Alors f est continue par morceaux sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et on a : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Remarques diverses

– **Extension aux applications définies "presque partout"**

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et si g ne diffère de f qu'en un nombre fini de points, alors g est encore continue par morceaux sur $[a,b]$, et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Si f est définie sur $[a,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si la restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$, on peut donc encore définir l'intégrale de f, en donnant à f une valeur quelconque en chacun des x_k.

– **Invariance de l'intégrale par translation**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Soit α un nombre réel.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.