



# Table des matières

I	Continuité . . . . .	2
I.1	Continuité en un point . . . . .	2
I.2	Propriétés . . . . .	3
I.3	Continuité sur un intervalle . . . . .	3
I.4	Théorème de la bijection réciproque . . . . .	4
I.5	Continuité uniforme . . . . .	5
I.6	Applications lipschitziennes . . . . .	6
II	Dérivabilité d'une fonction numérique . . . . .	7
II.1	Dérivabilité en un point . . . . .	7
II.2	Dérivabilité à gauche ou à droite en un point . . . . .	8
II.3	Opérations sur les applications dérivables en un point . . . . .	9
III	Dérivabilité sur un intervalle . . . . .	10
III.1	Applications dérivables, applications de classe $C^1$ . . . . .	10
III.2	Extremums d'une fonction dérivable . . . . .	11
III.3	Rolle et accroissements finis . . . . .	12
III.4	Monotonie des applications dérivables . . . . .	13
IV	Applications de classe $C^k$ . . . . .	14
IV.1	Dérivées successives . . . . .	14
IV.2	Opérations sur les applications de classe $C^k$ . . . . .	15
IV.3	Formules de Taylor . . . . .	16
V	Applications convexes . . . . .	17
V.1	Définitions équivalentes de la convexité . . . . .	17
V.2	Régularité des applications convexes . . . . .	19
V.3	Inégalités de convexité . . . . .	20

# I Continuité

## I.1 Continuité en un point

### Définition

Soient  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est *continue* en  $a$  si la limite de  $f$  en  $a$  existe.

Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à  $f(a)$ .

Autrement dit :  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (x \in I \text{ et } |x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

### Définition (Continuité à gauche en un point)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $a$  un élément de  $I$ , qui ne soit pas l'extrémité gauche de  $I$ .

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $J = I \cap ]-\infty, a]$

On dit que  $f$  est *continue à gauche* en  $a$  si  $g$  est continue en  $a$ .

Cela équivaut à dire que :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (a - \delta \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

### Définition (Continuité à droite en un point)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a$  un élément de  $I$  qui n'est pas l'extrémité droite de  $I$ .

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $J = I \cap [a, +\infty[$ .

On dit que  $f$  est *continue à droite* en  $a$  si  $g$  est continue en  $a$ .

Cela équivaut à dire que :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } (a \leq x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

### Remarque

Soit  $a$  un point intérieur à l'intervalle  $I$ . Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue en  $a \Leftrightarrow f$  est continue à droite et à gauche en  $a$ .

### Définition (Discontinuité de première espèce)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a$  un point de  $I$ .

Si  $f$  n'est pas continue en  $a$ , on dit que  $f$  est *discontinue* en ce point.

Si  $a$  est intérieur à  $I$ , si  $f$  est discontinue en  $a$ , mais si les limites à gauche et à droite en  $a$  existent et sont finies, on dit que  $f$  présente en  $a$  une *discontinuité de première espèce*.

### Définition (Prolongement par continuité)

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a$  un réel, extrémité de  $I$  mais n'appartenant pas à  $I$ .

On dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si  $\ell = \lim_a f$  existe et est finie.

Cela signifie que  $g$  définie par  $g(x) = f(x)$  sur  $I$ , et par  $g(a) = \ell$  est continue en  $a$ .

On dit que l'application  $g$  est le *prolongement par continuité* de  $f$  en  $a$ .

## I.2 Propriétés

**Proposition** (*Opérations sur applications continues en un point*)

- Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a$  un élément de  $I$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a$ , il en est de même pour  $fg$  et  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).
- Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $f(a) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{f}$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est continue en  $a$  et si  $g$  est continue en  $b = f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Proposition** (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

- Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a$  un élément de  $I$ .
- $f$  est continue en  $a$  si et seulement si, pour toute suite  $(u_n)$  de  $I$  convergeant vers  $a$ , la suite de terme général  $f(u_n)$  converge vers  $f(a)$ .

### Remarques

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application  $f$  n'est pas continue en un point  $a$  : on construit une suite  $(u_n)$  convergeant vers  $a$ , mais telle que la suite de terme général  $(f(u_n))$  ne converge pas vers  $f(a)$ .

De même si le réel  $a$  est une extrémité de  $I$  (n'appartenant pas à  $I$ ), si la suite  $(u_n)$  converge vers  $a$ , mais si la suite de terme général  $f(u_n)$  n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que  $f$  n'est pas prolongeable par continuité au point  $a$ .

## I.3 Continuité sur un intervalle

### Définition

- Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .
- On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .
- On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{C}(I)$ ) l'ensemble des applications continues sur  $I$ , à valeurs réelles.

### Propriétés et exemples

- Toute application constante est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Il en est de même des applications  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto |x|$ .
- Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $I$ .  
Pour tous scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\alpha f + \beta g$  est continue sur  $I$ .  
Il en est de même de l'application  $fg$ .  
Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$ .
- Les applications polynômiales sont continues sur  $\mathbb{R}$ .  
Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$ ,  $x \mapsto \tan(x)$ ,  $x \mapsto \exp(x)$ ,  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto x^\alpha$  sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.

- Soient  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ,  $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ , avec  $f(I) \subset J$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors les applications  $|f|$ ,  $f^+$  et  $f^-$  sont continues sur  $I$ .  
Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ , alors  $\inf(f, g)$  et  $\sup(f, g)$  sont continues sur  $I$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors la restriction de  $f$  à tout intervalle  $J \subset I$  est continue sur  $J$ .

### Remarques

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle  $I$ , on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonesque*.

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de  $f$  en chacun des points de  $I$ .

### Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

- || Soit  $f$  une application continue sur l'intervalle  $I$ .
- || Soient  $a, b$  deux éléments de  $I$  ( $a < b$ ).
- || Soit  $y$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .
- || Alors il existe un réel  $x$ , compris entre  $a$  et  $b$ , tel que  $f(x) = y$ .

### Proposition (énoncé équivalent au TVI)

- || Soit  $f$  une application continue sur l'intervalle  $I$ , à valeurs réelles.
- || Alors  $f(I)$  est un intervalle.

### Proposition

- || Soit  $f$  une application continue sur l'intervalle  $I$ , à valeurs réelles.
- || On suppose qu'il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$ .
- || Alors il existe  $c$  dans  $I$ , compris entre  $a$  et  $b$ , tel que  $f(c) = 0$ .

### Théorème (Fonction continue sur un segment)

- || Soit  $f$  une application continue sur un segment  $[a, b]$  ( $a, b$  deux réels,  $a \leq b$ ).
- || Alors  $f([a, b])$  est un segment  $[m, M]$ .

### Proposition

- || Toute application continue sur un segment  $y$  est bornée et  $y$  atteint ses bornes :
- || Il existe  $x_0$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\}$ .
- || Il existe  $x_1$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\}$ .

## I.4 Théorème de la bijection réciproque

### Théorème

- || Soit  $f$  dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , continue et strictement monotone sur  $I$ .
- || Alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle image  $J = f(I)$ .
- || De plus, la bijection réciproque  $f^{-1}$ , de  $J$  vers  $I$ , est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que  $f$ ).

### Remarques

- Les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite  $y = x$ , parallèlement à la droite  $y = -x$  (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $y = x$ ).
- Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à  $f(x) = 0$ .  
Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.
- Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , l'intervalle  $J = f(I)$  n'a pas toujours les mêmes propriétés que  $I$  (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si  $I$  est un segment. Mais si  $f$  est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de  $I$  est conservé.

### Exemples d'inversions d'applications continues

- L'application  $x \mapsto \exp(x)$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
La bijection réciproque est  $x \mapsto \ln(x)$ .
- Pour tout  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , les applications  $x \mapsto x^\alpha$  et  $x \mapsto x^{1/\alpha}$  sont deux bijections de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.
- L'application  $x \mapsto \sin(x)$  réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ .  
La bijection réciproque est notée  $x \mapsto \arcsin(x)$  (*arc sinus de x*).
- L'application  $x \mapsto \cos(x)$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .  
La bijection réciproque est notée  $x \mapsto \arccos(x)$  (*arc cosinus de x*).
- L'application  $x \mapsto \tan(x)$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .  
La bijection réciproque est notée  $x \mapsto \arctan(x)$  (*arc tangente de x*).

## I.5 Continuité uniforme

### Définition

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est *uniformément continue* sur  $I$  si :  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que :  $\forall (x, y) \in I \times I, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ .

### Remarque

Pour montrer qu'une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $\delta > 0$ , on puisse trouver  $x$  et  $y$  dans  $I$  tels que  $|x - y| < \delta$ , mais cependant tels que  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ .

Il revient au même de trouver deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de  $I$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$  mais telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$ .

### Continuité et continuité uniforme

Rappelons la définition de la continuité de  $f$  en un point  $a$  de  $I$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans cette définition, le réel  $\delta$  dépend de  $\varepsilon$  et du point  $a$ .

La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel  $\delta$  ne dépendant plus du point  $a$ .

En particulier : si  $f$  est uniformément continue sur l'intervalle  $I$ ,  $f$  est continue sur  $I$ .

La réciproque est fautive, comme le montrent ces exemples :  $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } ]0, 1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

### **Théorème** (*Théorème de Heine*)

|| Soit  $f$  une application continue sur un segment  $[a, b]$  ( $a, b$  deux réels,  $a \leq b$ ).  
|| Alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

## **I.6 Applications lipschitziennes**

### **Définition**

|| Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  
|| On dit que  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne (ou encore lipschitzienne de rapport  $\lambda$ ) sur  $I$  si :  
||  $\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ .

### **Remarques et propriétés**

- Dire que  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , c'est dire que les taux d'accroissement de  $f$  sur  $I$  (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par  $\lambda$ .
- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .  
La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur le segment  $[0, 1]$ .
- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , alors, pour tout  $\mu > \lambda$ ,  $f$  est  $\mu$ -lipschitzienne sur  $I$ .
- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , avec  $\lambda < 1$ , on dit que  $f$  est *contractante* sur  $I$ .
- L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si  $f$  est dérivable sur  $I$ , et si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|f'(x)| \leq \lambda$ , alors  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ .

### **Opérations entre applications lipschitziennes**

- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$ , alors  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $[a, c]$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont  $\lambda$ -lipschitziennes sur  $I$ , alors  $f + g$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ .
- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , alors  $\alpha f$  est  $|\alpha|\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont lipschitziennes et bornées sur  $I$ , alors  $fg$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Si  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne sur  $I$ , si  $g$  est  $\mu$ -lipschitzienne sur  $J$ , et si  $f(I) \subset J$ , alors l'application  $g \circ f$  est  $\lambda\mu$ -lipschitzienne sur  $I$ .

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle  $I$  sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que  $f$  est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !

## II Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### II.1 Dérivabilité en un point

**Définition** (Nombre dérivé en un point)

On dit que  $f$  est *dérivable* en un point  $a$  de  $I$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .  
 Cette limite est appelée *nombre dérivé* de  $f$  en  $a$  et est notée  $f'(a)$ , ou  $D(f)(a)$ , ou  $\frac{df}{dx}(a)$ .

**Interprétation géométrique**

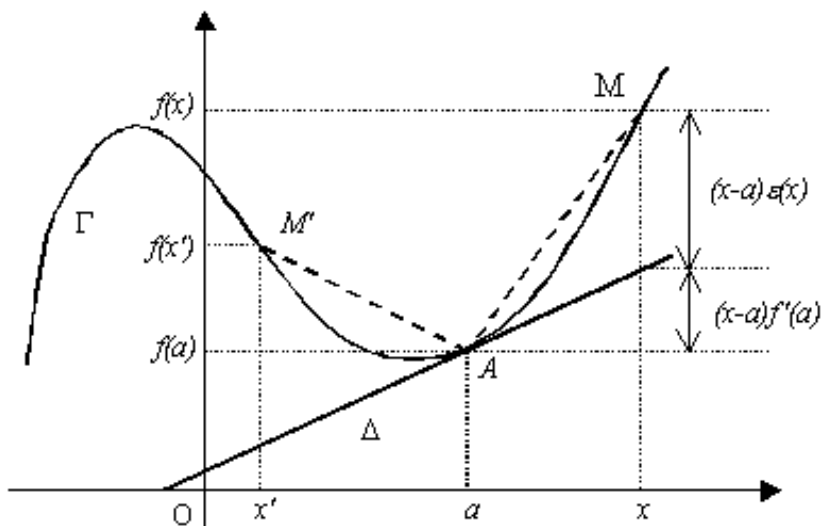
Soient  $A = (a, f(a))$  et  $M(x, f(x))$  sur la courbe représentative  $\Gamma$  de  $f$ .

Le taux d'accroissement  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est le coefficient directeur de la *corde*  $AM$ .

Dire que  $f$  est dérivable en  $a$ , c'est dire que la corde  $AM$  possède une position limite non verticale  $\Delta$ , de coefficient directeur  $f'(a)$ , quand  $x$  tend vers  $a$ , c'est-à-dire quand  $M$  tend vers  $A$  sur  $\Gamma$ . On dit que  $\Delta$  est la *tangente* à  $\Gamma$  en son point d'abscisse  $a$ .

Dire que  $f$  est dérivable en  $a$ , c'est donc dire que la courbe représentative  $\Gamma$  de  $f$  présente au point  $A(a, f(a))$  une tangente  $\Delta$  non verticale.

L'équation de  $\Delta$  est  $y = f(a) + (x - a)f'(a)$ .



**Proposition** (Une autre définition de la dérivabilité)

$f$  est dérivable en un point  $a$  de  $I \Leftrightarrow$  il existe un réel  $\ell$  et une application  $x \mapsto \varepsilon(x)$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  et  $\varepsilon(a) = 0$ , et tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$$

Le réel  $\ell$  est alors égal à  $f'(a)$ .

La figure ci-dessus montre les quantités  $(x - a)f'(a)$  et  $(x - a)\varepsilon(x)$ , relatives à un point  $M(x, f(x))$  assez "éloigné" de  $A$ . Au voisinage de  $A$ , et si  $f'(a) \neq 0$  (c'est-à-dire si la tangente  $\Delta$  n'est pas horizontale), alors  $(x - a)\varepsilon(x)$  est négligeable devant  $(x - a)f'(a)$ .



**Remarques et exemples**

- Une translation permet de se ramener à un calcul à l'origine :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .
- Si  $f$  dérivable en  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$ . La réciproque est fautive.  
Exemple : si  $f(0) = 0$  et  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$ ,  $f$  est continue mais non dérivable en 0.
- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors :  $\forall a \in I, f'(a) = 0$ .
- Si  $f$  est l'application  $x \mapsto x^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) alors :  $\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = na^{n-1}$ .
- Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\exp'(a) = \exp(a)$  et  $\ln'(a) = \frac{1}{a}$ .
- Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\sin'(a) = \cos(a)$  et  $\cos'(a) = -\sin(a)$ .  
Si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , alors  $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a)$ .

**II.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point**

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

**Définition (Nombre dérivé à gauche)**

Soit  $a$  un point de  $I$ , distinct de l'extrémité gauche de  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $a$  et est notée  $f'_g(a)$ .

**Définition (Nombre dérivé à droite)**

Soit  $a$  un point de  $I$ , distinct de l'extrémité droite de  $I$ .

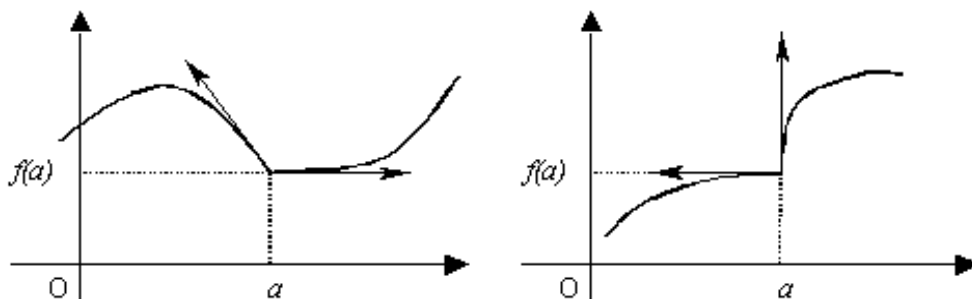
On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

Cette limite est appelée nombre dérivé à droite de  $f$  en  $a$  et est notée  $f'_d(a)$ .

**Interprétation géométrique**

Dire que  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) en  $a$ , c'est dire que la courbe  $\Gamma$  de  $f$  admet au point  $A(a, f(a))$  une demi-tangente à droite (resp. à gauche) non verticale.

Le coefficient directeur de cette demi-tangente est  $f'_d(a)$  (resp.  $f'_g(a)$ ).



Sur l'exemple de gauche,  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$ , avec  $f'_g(a) = -1$  (demi-tangente oblique, parallèle à  $y = -x$ ) et  $f'_d(a) = 0$  (demi-tangente horizontale).

Sur l'exemple de droite, on a  $f'_g(a) = 0$  (demi-tangente horizontale), mais  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $a$  (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).