Table des matières

I Continuité

I.1 Continuité en un point

Définition

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.
Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à $f(a)$.
Autrement dit : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Définition *(Continuité à gauche en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit a un élément de I, qui ne soit pas l'extrémité gauche de I.
Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a]$
On dit que f est *continue à gauche* en a si g est continue en a.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou encore :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a - \delta \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Définition *(Continuité à droite en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I qui n'est pas l'extrémité droite de I.
Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap [a, +\infty[$.
On dit que f est *continue à droite* en a si g est continue en a.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(x)$ ou encore :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a \leq x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Remarque

Soit a un point intérieur à l'intervalle I. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.
f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

Définition *(Discontinuité de première espèce)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I.
Si f n'est pas continue en a, on dit que f est *discontinue* en ce point.
Si a est intérieur à I, si f est discontinue en a, mais si les limites à gauche et à droite en a existent et sont finies, on dit que f présente en a une *discontinuité de première espèce.*

Définition *(Prolongement par continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un réel, extrémité de I mais n'appartenant pas à I.
On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe et est finie.
Cela signifie que g définie par $g(x) = f(x)$ sur I, et par $g(a) = \ell$ est continue en a.
On dit que l'application g est le *prolongement par continuité* de f en a.

I.2 Propriétés

Proposition *(Opérations sur applications continues en un point)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

Si f et g sont continues en a, il en est de même pour fg et $\alpha f + \beta g$ ($\alpha\beta \in \mathbb{R}$).

Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Remarques

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application f n'est pas continue en un point a : on construit une suite (u_n) convergeant vers a, mais telle que la suite de terme général $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

De même si le réel a est une extrémité de I (n'appartenant pas à I), si la suite (u_n) converge vers a, mais si la suite de terme général $f(u_n)$ n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que f n'est pas prolongeable par continuité au point a.

I.3 Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(I)$) l'ensemble des applications continues sur I, à valeurs réelles.

Propriétés et exemples

- Toute application constante est continue sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$.
- Soient f et g deux applications continues sur I.
  Pour tous scalaires α et β, $\alpha f + \beta g$ est continue sur I.
  Il en est de même de l'application fg.
  Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Les applications polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
  Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.

- Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.
- Si f est continue sur I, alors les applications $|f|$, f^+ et f^- sont continues sur I.
  Si f et g sont continues sur I, alors $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont continues sur I.
- Si f est continue sur I, alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J.

Remarques

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle I, on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonesque*.

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de f en chacun des points de I.

Théorème *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit f une application continue sur l'intervalle I.
Soient a, b deux éléments de I $(a < b)$.
Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel x, compris entre a et b, tel que $f(x) = y$.

Proposition *(énoncé équivalent au TVI)*

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Proposition

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
Alors il existe c dans I, compris entre a et b, tel que $f(c) = 0$.

Théorème *(Fonction continue sur un segment)*

Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
Alors $f([a,b])$ est un segment $[m,M]$.

Proposition

Toute application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes :
Il existe x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\}$.
Il existe x_1 dans $[a,b]$ tel que $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\}$.

I.4 Théorème de la bijection réciproque

Théorème

Soit f dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque f^{-1}, de J vers I, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

Remarques

– Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).

– Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à $f(x) = 0$.
Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.

– Si f est continue sur l'intervalle I, l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que I (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si I est un segment. Mais si f est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de I est conservé.

Exemples d'inversions d'applications continues

– L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.

– Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.

– L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de* x).

– L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de* x).

– L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de* x).

I.5 Continuité uniforme

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tel que : $\forall\, (x, y) \in I \times I, |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$.

Remarque

Pour montrer qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver x et y dans I tels que $|x - y| < \delta$, mais cependant tels que $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$.
Il revient au même de trouver deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$ mais telles que $\lim\limits_{n\to\infty} (f(y_n) - f(x_n)) \ne 0$.

Continuité et continuité uniforme

Rappelons la définition de la continuité de f en un point a de I :
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in$I, $|x - a| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$.
Dans cette définition, le réel δ dépend de ε et du point a.
La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel δ ne dépendant plus du point a.
En particulier : si f est uniformément continue sur l'intervalle I, f est continue sur I.

La réciproque est fausse, comme le montrent ces exemples : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0,1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

Théorème *(Théorème de Heine)*

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leq b$).
Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

I.6 Applications lipschitziennes

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit λ un réel strictement positif.
On dit que f est $\lambda -$ *lipschitzienne* (ou encore lipschitzienne de rapport λ) sur I si :
$\forall\, (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$.

Remarques et propriétés

– Dire que f est λ-lipschitzienne sur I, c'est dire que les taux d'accroissement de f sur I (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par λ.

– Si f est λ -lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[0, 1]$.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors, pour tout $\mu > \lambda$, f est μ-lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, avec $\lambda < 1$, on dit que f est *contractante* sur I.

– L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si f est dérivable sur I, et si, pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \lambda$, alors f est λ-lipschitzienne sur I.

Opérations entre applications lipschitziennes

– Si f est λ-lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est λ-lipschitzienne sur $[a, c]$.

– Si f et g sont λ-lipschitziennes sur I, alors $f + g$ est λ-lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors αf est $|\alpha|\lambda$-lipschitzienne sur I.

– Si f et g sont lipschitziennes et bornées sur I, alors fg est lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, si g est μ-lipschitzienne sur J, et si $f(I) \subset J$, alors l'application $g \circ f$ est $\lambda\mu$-lipschitzienne sur I.

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle I sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que f est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !

II Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

II.1 Dérivabilité en un point

Définition *(Nombre dérivé en un point)*

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Interprétation géométrique

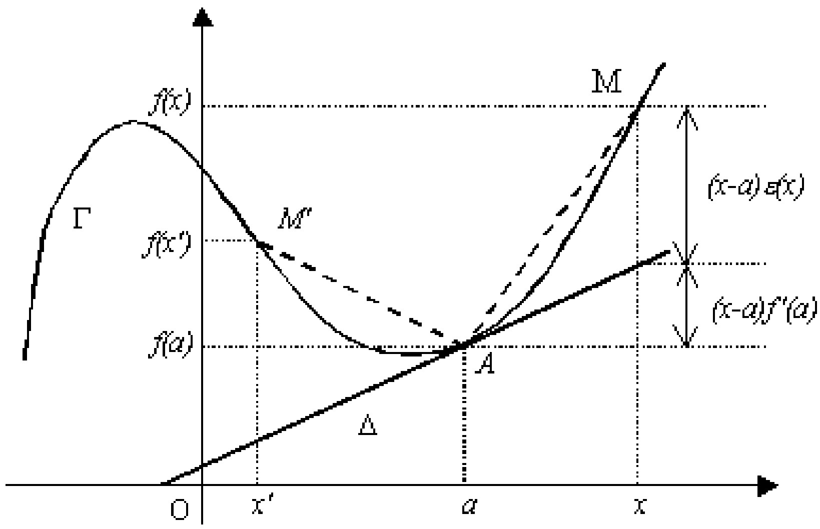
Soient $A=(a,f(a))$ et $M(x,f(x))$ sur la courbe représentative Γ de f.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la *corde* AM.

Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la corde AM possède une position limite non verticale Δ, de coefficient directeur $f'(a)$, quand x tend vers a, c'est-à-dire quand M tend vers A sur Γ. On dit que Δ est la *tangente* à Γ en son point d'abscisse a.

Dire que f est dérivable en a, c'est donc dire que la courbe représentative Γ de f présente au point $A(a,f(a))$ une tangente Δ non verticale.

L'équation de Δ est $y=f(a)+(x-a)f'(a)$.



Proposition *(Une autre définition de la dérivabilité)*

f est dérivable en un point a de I $\Leftrightarrow$ il existe un réel ℓ et une application $x \mapsto \varepsilon(x)$ de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x)=0$ et $\varepsilon(a)=0$, et tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x)=f(a)+(x-a)\ell+(x-a)\varepsilon(x)$$

Le réel ℓ est alors égal à $f'(a)$.

La figure ci-dessus montre les quantités $(x-a)f'(a)$ et $(x-a)\varepsilon(x)$, relatives à un point $M(x,f(x))$ assez "éloigné" de A. Au voisinage de A, et si $f'(a) \neq 0$ (c'est-à-dire si la tangente Δ n'est pas horizontale), alors $(x-a)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $(x-a)f'(a)$.

Remarques et exemples

– Une translation permet de se ramener à un calcul à l'origine : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

– Si f dérivable en a, f est continue en a. La réciproque est fausse.
Exemple : si $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, f est continue mais non dérivable en 0.

– Si f est constante sur I, alors : $\forall\, a \in I,\ f'(a) = 0$.

– Si f est l'application $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) alors : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ f'(a) = na^{n-1}$.

– Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\exp'(a) = \exp(a)$ et $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.

– Pout tout a de $\mathbb{R}$, $\sin'(a) = \cos(a)$ et $\cos'(a) = -\sin(a)$.
Si $a \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$, alors $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a)$.

II.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

Définition *(Nombre dérivé à gauche)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité gauche de I.

On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a,\, x < a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de f en a et est notée $f'_g(a)$.

Définition *(Nombre dérivé à droite)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité droite de I.

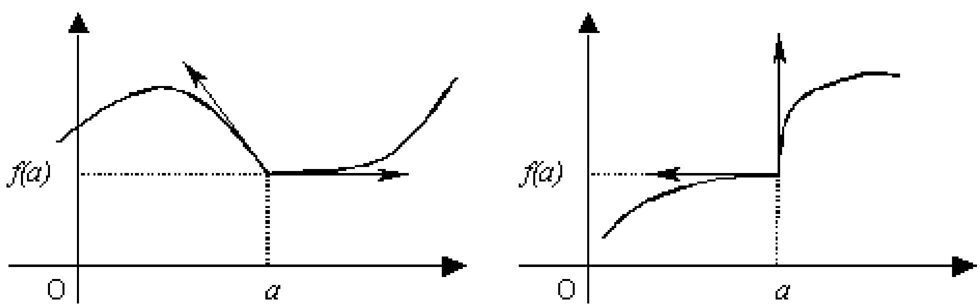
On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a,\, x > a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à droite de f en a et est notée $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique

Dire que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, c'est dire que la courbe Γ de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) non verticale.

Le coefficient directeur de cette demi-tangente est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$.)



Sur l'exemple de gauche, f est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a) = -1$ (demi-tangente oblique, parallèle à $y = -x$) et $f'_d(a) = 0$ (demi-tangente horizontale.)

Sur l'exemple de droite, on a $f'_g(a) = 0$ (demi-tangente horizontale), mais f n'est pas dérivable à droite en a (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).