Table des matières

I Arcs paramétrés du plan

1. Représentations paramétriques

Définition

On appelle *arc paramétré* du plan toute application $f : I \to \mathbb{R}^2$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On note souvent $M(t)$ plutôt que $f(t)$: on dit alors que $M(t)$ est le point de paramètre t de l'arc (I, f).

L'ensemble $f(I) = \{M(t), t \in I\}$ est appelé *support* de l'arc paramétré (I, f).

Remarques

- On ne confondra pas un arc paramétré (qui est une application) avec son support (qui est l'ensemble image de cette application.)

  Par exemple, les arcs paramétrés définis sur $\mathbb{R}$ par $M(t) = (\cos t, \sin t)$ et $N(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ sont distincts, mais dans les deux cas le support est le cercle de centre 0 et de rayon 1.
- Notons $(x(t), y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère canonique (O, e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

  Se donner l'arc (I, f), c'est se donner les applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

  On dit que (I, f) est de classe $\mathcal{C}^n$ si les applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^n$.

  On notera alors, pour tout indice k de $\{0, \ldots, n\}$, et tout t de I : $f^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(t)}(t))$.

  On notera également souvent $M'(t)$, $M''(t)$, etc... les vecteurs dérivés successifs en t.

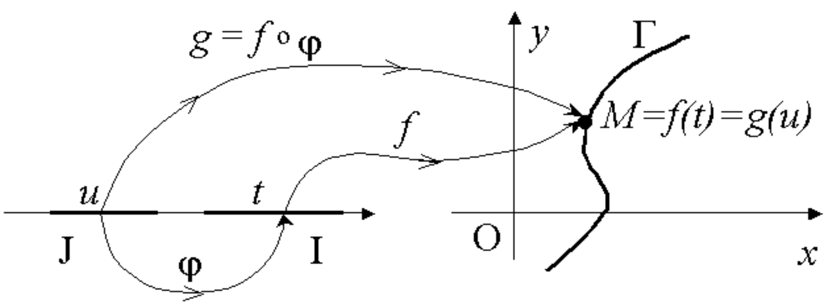
  Dans la suite, on considérera toujours des arcs de classe $\mathcal{C}^k$, avec k "suffisamment" grand.
- Interprétation cinématique :

  On considère souvent que la variable t désigne le temps. $M(t) = (x(t), y(t))$ désigne alors la position d'un *point mobile* à l'instant t. On dit que le support de l'arc est la *trajectoire* de ce point. Les vecteurs $f'(t) = (x'(t), y'(t))$ et $f''(t) = (x''(t), y''(t))$ sont appelés respectivement *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* au point $M(t)$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application, la courbe $y = f(x)$ est le support de l'arc $t \mapsto (t, f(t))$.

Définition

On considère deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g), tous les deux de classe $\mathcal{C}^k$.

On dit que (I, f) et (J, g) sont deux paramétrages du même arc s'il existe une bijection φ de J sur I, de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que φ^{-1}, et telle que $g = f \circ \varphi$.



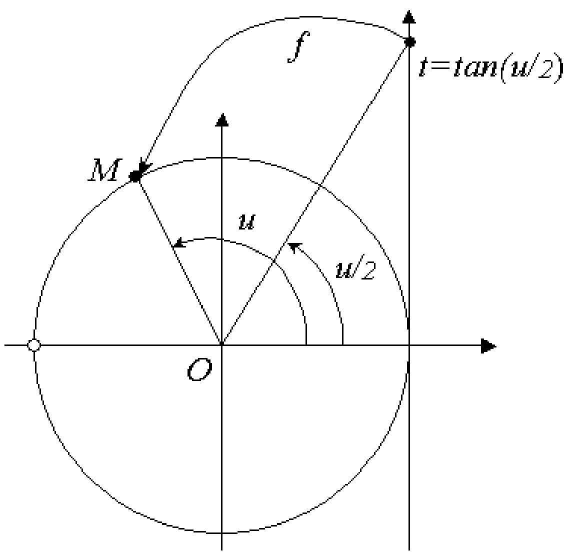
On voit ici deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) dans la situation évoquée par la définition.

Ils ont bien sûr le même support Γ (mais attention : le fait pour deux arcs d'avoir le même support ne suffit pas pour qu'ils soient deux paramétrages du même arc.)

Sur le support Γ de ces deux arcs, on a représenté un point M, de paramètre u pour (J, g) et de paramètre $t = \varphi(u)$ pour la représentation paramétrique (I, f).

Exemples

Considérons l'arc $(]-\pi, \pi[, g)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$,
défini par : $\forall u \in]-\pi, \pi[,\ g(u) = (\cos u, \sin u)$.
Le support est le cercle unité, privé de $(-1, 0)$.
Considérons l'arc $(\mathbb{R}, f)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, défini par
$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.
Pour tout u de $]-\pi, \pi[$, posons $t = \varphi(u) = \tan \frac{u}{2}$.
φ est bijective, de classe $\mathcal{C}^\infty$, ainsi que son inverse.
On a l'égalité : $\forall u \in]-\pi, \pi[,\ g(u) = f(\varphi(u))$.
Ainsi $(]-\pi, \pi[, g)$ et $(\mathbb{R}, f)$ sont des représentations d'un même arc paramétré.
On a représenté ici un point M du support de l'arc.
Le point M est à la fois :



- Le point de paramètre u, pour l'arc $(]-\pi, \pi[, g)$.
- Le point de paramètre t, pour l'arc $(\mathbb{R}, f)$.

Considérons maintenant les arcs (I, f) et (I, g), avec $I = [0, 2\pi[$ et $\begin{cases} f(t) = (\cos t, \sin t) \\ g(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \end{cases}$

Ces deux arcs ont le même support (le cercle unité.)

Pourtant, ce ne sont pas deux représentations du même arc.

En effet le seul antécédent de $(1, 0)$ par f est $t = 0$. En revanche $(1, 0) = g(0) = g(\pi)$.

Il n'existe donc pas de bijection φ telle que $g = f \circ \varphi$ (car une telle application φ vérifierait nécessairement $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.)

Définition *(Points multiples)*

Soit M un point du support de l'arc paramétré (I, f).

On dit que M est un *point multiple* de cet arc s'il existe au moins deux réels t_0, t_1 distincts de I tels que $M = M(t_0) = M(t_1)$. Sinon on dit que M est un *point simple* de l'arc.

Dans le cas où il existe exactement deux tels réels t_0, t_1, on dit que M est un *point double*.

Exemple

- On considère l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.

  On va montrer que cet arc présente un point double.

  On doit donc trouver deux réels t_0 et t_1 distincts tels que $M(t_0) = M(t_1)$.

– $M(t_0)=M(t_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_0)=x(t_1) \\ y(t_0)=y(t_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_0(t_1^2-1)=t_1(t_0^2-1) \\ t_0^2(t_1-1)=t_1^2(t_0-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1-t_0)(t_0t_1+1)=0 \\ (t_1-t_0)(t_0+t_1-t_0t_1)=0 \end{cases}$

Or $t_0 \neq t_1$, donc $\begin{cases} t_0+t_1=-1 \\ t_0t_1=-1 \end{cases}$. Les réels t_0, t_1 sont donc les racines de $t^2+t-1=0$.

Ainsi $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Pour ces deux valeurs de t, on a $x(t)=\frac{t}{t^2-1}=-1$ et $y(t)=\frac{t^2}{t-1}=-1$.

On constate donc que $M=(-1,-1)$ est point double, pour $t_0=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque

Dans ce qui suit, on considérera toujours qu'un point $M(t)$ d'un arc (I,f) est simple, au besoin en se restreignant à un sous-intervalle de I sur lequel l'application f est injective.

Il n'y a alors pas d'ambiguité à parler des propriétés du point $M(t)$ de l'arc quand ces propriétés sont en fait celles de l'application f en t. C'est le cas dans la définition suivante.

Définition *(points réguliers, points stationnaires)*

Soit (I,f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$.
On dit qu'un point $M(t)$ de l'arc est *régulier* si $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$.
On dit que $M(t)$ est *singulier*, ou *stationnaire*, si $f'(t)=\overrightarrow{0}$.
On dit que le point $M(t)$ est *birégulier* si les vecteurs $f'(t), f''(t)$ sont libres.
On dit que l'arc (I,f) est régulier (birégulier) si tous ses points sont réguliers (biréguliers).

Remarques

– Interprétation cinématique :
Un point stationnaire est un point dont le vecteur vitesse est nul.
Un arc est régulier si tous ses points ont un vecteur vitesse non nulle.

– On suppose que (J,g) et (I,f) sont deux paramétrages du même arc.
Soit $\varphi : J \to I$ le changement de paramètre, tel que $f=g\circ\varphi$.
Soit M un point du support de ces deux arcs, de paramètre u sur (J,g) et $t=\varphi(u)$ sur (I,f).
Ce point est régulier (birégulier) sur l'un des deux arcs si et seulement s'il l'est sur l'autre.
Autrement dit, la notion de point régulier (birégulier) est indépendante de la représentation paramétrique de l'arc considéré.

2. Tangente en un point d'un arc paramétré

Définition *(définition de la tangente en un point)*

Soit (I,f) un arc paramétré, et soit $M(t_0)$ le point de paramètre t_0.
On suppose qu'au voisinage de t_0, on a $M(t)\neq M(t_0)$.
Soit $\mathcal{D}_t$ la droite passant par les points $M(t_0)$ et $M(t)$.
On suppose que $\mathcal{D}_t$ possède une position limite Δ quand t tend vers t_0.
On dit alors que la droite Δ est la *tangente* au point de paramètre t_0 de l'arc (I,f).

Remarques

– On verra plus loin que la tangente en $M(t)$ est dirigée en général par le vecteur $f'(t)$.

Dans certains cas, il peut être utile de revenir à la définition précédente.

On considère alors le coefficient directeur $\delta_t = \dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ de la corde $(M(t_0), M(t))$.

◇ Si $\lim\limits_{t\to t_0} \delta_t = a \in \mathbb{R}^*$, on trouve une tangente oblique d'équation $Y = a(X - x(t_0)) + y(t_0)$.

Le signe de $y(t) - a(x(t) - x(t_0)) - y(t_0)$ donne alors la position par rapport à cette tangente.

◇ Si $\lim\limits_{t\to t_0} \delta_t = 0$, on trouve une tangente horizontale $Y = y(t_0)$.

◇ Si $\lim\limits_{t\to t_0} \delta_t = \infty$, on trouve une tangente verticale $X = x(t_0)$.

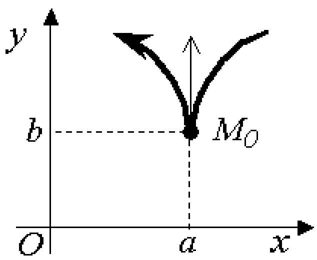
– L'allure de la courbe au voisinage d'une (demi-)tangente verticale ne pose en général pas de problème : elle se déduit facilement des variations de $t \mapsto x(t)$ et de $y \mapsto y(t)$.

Dans cet exemple on suppose que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$.

On suppose d'autre part que : $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)-b}{x(t)-a} = \infty$.

(arc orienté selon les t croissants.)

	$t<t_0$	t_0	$t>t_0$
$x'(t)$	$-$		$-$
$x(t)$	$\searrow$	a	$\searrow$
$y'(t)$	$-$		$+$
$y(t)$	$\searrow$	b	$\nearrow$



– Il se peut que la limite du taux d'accroissement δ_t ne puisse être calculée quand t tend vers t_0 que si $t > t_0$ ou si $t < t_0$. Il se peut aussi que les limites en t_0 à droite ou à gauche soient distinctes. On parlera alors de *demi-tangentes* en $M(t_0)$. Il arrive également qu'on étudie une éventuelle demi-tangente en un *point-limite*, obtenu quand $t \to \pm\infty$. Dans ce cas, un prolongement du support de l'arc est nécessaire pour servir d'origine à cette demi-tangente.

Exemple

Considérons l'arc paramétré défini par $x(t) = \dfrac{t^2-t}{t^2+1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-t}$.

On constate que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = 1$. Le point $M(1,1)$ est donc un point-limite.

On prolonge le support de l'arc en considérant que ce point est “atteint à l'infini”.

Quand $t \to \infty$: $x(t) - 1 = \dfrac{-t-1}{t^2+1} \sim -\dfrac{1}{t}$ et $y(t) - 1 = \dfrac{t}{t^2-t} \sim \dfrac{1}{t}$. Donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)-1}{x(t)-1} = -1$.

La droite $Y = -(X-1) + 1 = 2 - X$ est donc tangente au point $M(1,1)$.

On constate que $y(t) + x(t) - 2 = \dfrac{2}{(t-1)(t^2+1)} \sim \dfrac{2}{t^3}$ quand $t \to \pm\infty$.

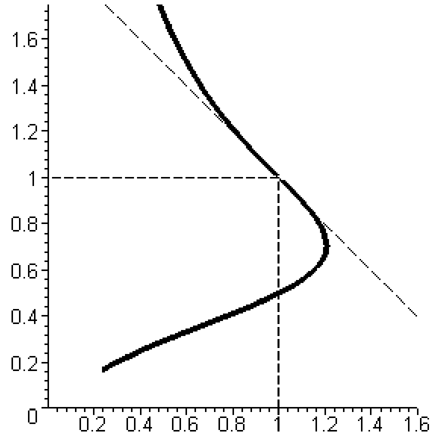
Autrement dit :

◇ $y(t) > 2 - x(t)$ quand $t \to +\infty$:
La courbe est alors au-dessus de sa tangente.

◇ $y(t) < 2 - x(t)$ quand $t \to -\infty$.
La courbe est alors en-dessous de sa tangente.

◇ Au point-limite $M(1,1)$, la droite $y = 2 - x$ est donc une tangente d'inflexion.

Voici l'allure de la courbe au voisinage du point $M(1,1)$.



Proposition *(tangente en un point régulier)*

Avec les notations précédentes, on suppose que le point $M(t_0)$ est régulier ($f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.)
Alors la tangente Δ en $M(t_0)$ existe, et elle est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.

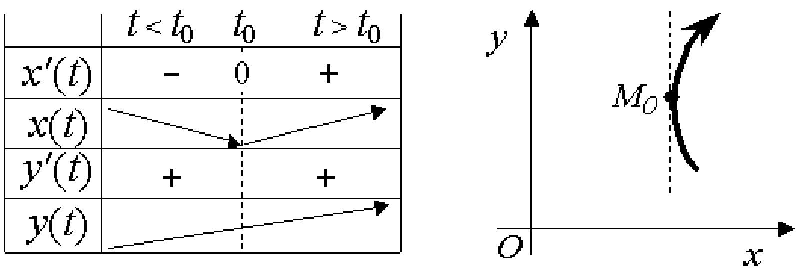
Proposition *(tangente en un point singulier)*

Avec les notations précédentes, on suppose que le point $M(t_0)$ est singulier ($f'(t_0) = \overrightarrow{0}$.)
On suppose cependant qu'il existe un plus petit entier $k \geq 2$ tel que $f^{(k)}(t_0) \neq 0$.
Alors la tangente Δ en $M(t_0)$ existe, et elle est dirigée par le vecteur $f^{(k)}(t_0)$.

Remarques

– La tangente en un point $M(t_0)$ de l'arc paramétré (I, f) est donc toujours dirigée par le premier vecteur dérivé non nul en t_0.

– On suppose que $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$. Alors la tangente en $M(t_0)$ est horizontale.
Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ est verticale.
On a représenté ci-dessous ce que pourrait être l'allure du support de l'arc au voisinage d'un point en lequel la tangente est verticale (la portion de l'arc est orientée dans le sens des t croissants.)



– Le plus souvent, en un point stationnaire, on a $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $f''(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
Dans ce cas, la tangente est dirigée par le vecteur accélération $f''(t_0)$.

– Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ un point de l'arc (I, f), avec $x'(t) \neq 0$ (tangente non verticale).
En ce point, $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ représente le coefficient directeur de la tangente.

– Si (I, f) et (J, g) sont deux paramétrages admissibles d'un même arc, on vérifie que l'existence de la tangente en un point M de l'arc, ainsi que la position de cette tangente, sont indépendantes du paramétrage utilisé.

Exemple

On a vu que l'arc $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ présente le point double $(-1,-1)$.

Ce point double est obtenu pour $t_0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (solutions de $t^2+t-1=0$.)

En ce point, il y a deux tangentes de coefficient directeur $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t(2-t)(t+1)^2}{t^2+1}$.

Pour chacune des valeurs t_0 et t_1, on peut simplifier $m(t)$ en utilisant $t^2 = 1-t$.

On trouve :

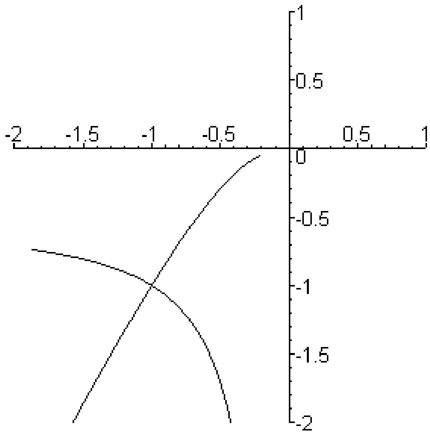
$$\begin{aligned} m(t) &= t(t+1)^2 = t(t^2+2t+1) \\ &= t(2+t) = 2t + t^2 = 1 + t \end{aligned}$$

On constate donc que :

$$\begin{aligned} m(t_0)m(t_1) &= (1+t_0)(1+t_1) \\ &= t_0t_1 + (t_0+t_1) + 1 = -1 \end{aligned}$$

Cela prouve que les deux tangentes en $M(-1,-1)$ sont orthogonales.

On a représenté ici l'allure de la courbe au voisinage du point double.



3. Allure d'un arc au voisinage d'un point

On se donne un arc paramétré (I,f), l'application f étant “suffisamment” dérivable.

On veut étudier l'allure du support de l'arc (I,f) au voisinage du point M_0 de paramètre t_0.

Notations

- On note p le plus petit entier strictement positif tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
- On note q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient libres.
- Pour p, le cas le plus fréquent est $p=1$, c'est-à-dire $f'(t_0) \neq 0$ (quand M_0 est *régulier*.)
- Si $p=1$, le cas le plus fréquent est $p=1, q=2$, c'est-à-dire $f'(t_0), f''(t_0)$ libres.
  Ce cas correspond à la définition d'un point *birégulier*.

On effectue un développement limité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, en t_0, à l'ordre q.

Ces développements limités sont a priori obtenus pas la formule de Taylor-Young :

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\,x'(t_0) + \dfrac{1}{2!}(t-t_0)^2 x''(t_0) + \cdots + \dfrac{1}{q}(t-t_0)^q\, x^{(q)}(t_0) + o(t-t_0)^q \\[2ex] y(t) = y(t_0) + (t-t_0)\,y'(t_0) + \dfrac{1}{2}(t-t_0)^2 y''(t_0) + \cdots + \dfrac{1}{q!}(t-t_0)^q\, y^{(q)}(t_0) + o(t-t_0)^q \end{cases}$$

Ces deux développements peuvent être regroupés en un seul développement limité *vectoriel* :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)\,f'(t_0) + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 f''(t_0) + \cdots + \frac{1}{q!}(t-t_0)^q\, f^{(q)}(t_0) + \overrightarrow{o}(t-t_0)^q$$

Compte tenu de la définition de l'entier p, ce développement peut s'écrire :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{p!}(t-t_0)^p f^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{1}{q!}(t-t_0)^q f^{(q)}(t_0) + \overrightarrow{o}(t-t_0)^q$$

Dans cette dernière égalité, les pointillés désignent des vecteurs colinéaires à $f^{(p)}(t_0)$.
On considère maintenant le repère $(M_0, U = \frac{1}{p!}f^{(p)}(t_0), V = \frac{1}{q!}f^{(q)}(t_0))$.
Dans ce repère, on note $X(t), Y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$.
Le développement précédent s'écrit :

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{1}{p!}(t-t_0)^p f^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{1}{q!}(t-t_0)^q f^{(q)}(t_0) + \overrightarrow{o}(t-t_0)^q$$

Cette égalité donne immédiatement :

$$\begin{cases} X(t) = (t-t_0)^p + o(t-t_0)^p \sim (t-t_0)^p \\ Y(t) = (t-t_0)^q + o(t-t_0)^q \sim (t-t_0)^q \end{cases}$$

Ce résultat permet, en fonction de la parité de p et q, et de la position de t par rapport à t_0, de placer le point $M(t)$ dans les différents quadrants du repère $(M(t_0), U, V)$.
Cela permet donc d'obtenir la forme du support de l'arc au voisinage de $M_0 = M(t_0)$.
Rappelons que dans tous les cas, la droite (M_0, U) est la tangente à l'arc au point M_0.
On va maintenant voir les différents cas possibles.

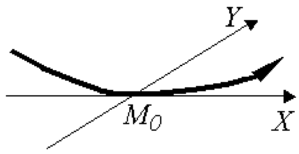
Les différents cas

– Dans les schémas ci-dessous, on a représenté une portion du support de l'arc, au voisinage du point de paramètre t_0. L'arc est "orienté" dans le sens des t croissants.

– L'entier p est impair, et l'entier q est pair.

C'est la situation la plus classique car elle contient le cas des points biréguliers ($p = 1, q = 2$).

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	–	0	+
$Y(t)$	+	0	+

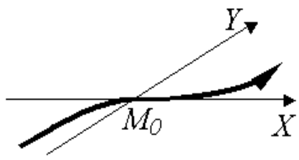


Si on revient à l'interprétation cinématique, on voit qu'en un point birégulier (les vecteurs vitesse et accélération sont libres), le vecteur accélération pointe dans la concavité de l'arc.

– L'entier p est impair, et l'entier q est impair.

La courbe "traverse" sa tangente.
M_0 est un *point d'inflexion*.

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	–	0	+
$Y(t)$	–	0	+

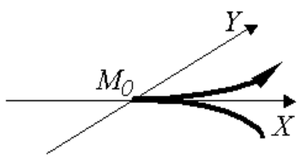


Le cas courant est $p = 1, q = 2$: $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $f''(t_0)$ lié à $f'(t_0)$ et $f^{(3)}(t_0)$ libre avec $f'(t_0)$.

– L'entier p est pair, et l'entier q est impair.

On dit que M_0 est un point de *rebroussement de première espèce*

	$t < t_0$	t_0	$t > t_0$
$X(t)$	+	0	+
$Y(t)$	–	0	+

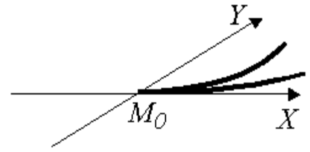


Le cas courant est $p = 2, q = 3$: $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$, $f''(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $f^{(3)}(t_0)$ libre avec $f''(t_0)$.

– L'entier p est pair, et l'entier q est pair.

On dit que M_0 est un point de *rebroussement de seconde espèce*

	$t<t_0$	t_0	$t>t_0$
$X(t)$	+	0	+
$Y(t)$	+	0	+



Le cas courant est $\begin{cases} p=2 \\ q=4 \end{cases}$: $f'(t_0)=\overrightarrow{0}$, $f''(t_0)\neq\overrightarrow{0}$, $\begin{cases} f^{(3)}(t_0) \text{ lié à } f''(t_0) \\ f^{(4)}(t_0) \text{ libre avec } f''(t_0) \end{cases}$

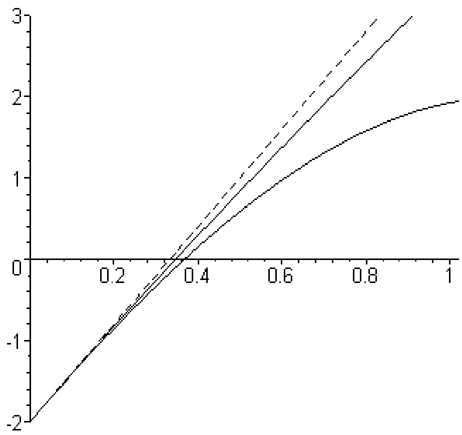
Ici, une étude supplémentaire est nécessaire pour distinguer les deux branches de l'arc.

Exemple

Pour l'arc $t\mapsto f(t)=(\mathrm{e}^{t-1}-t, t^3-3t)$, on a $f'(t)=(\mathrm{e}^{t-1}, 3t^2-3)$.

On constate que $f'(1)=\overrightarrow{0}$. Le point $M(1)=(0,-2)$ est donc stationnaire.

On a $f''(t)=(\mathrm{e}^{t-1}, 6t)$ donc $f''(1)=(1,6)\neq\overrightarrow{0}$.
L'entier p est donc égal à 2.
De même $f^{(3)}(t)=(\mathrm{e}^{t-1}, 6)$ donc $f^{(3)}(1)=(1,6)$.
On constate que $f^{(3)}(1)$ est lié avec $f''(1)$. Donc $q>3$.
Enfin $f^{(4)}(t)=(\mathrm{e}^{t-1}, 0)$ donc $f^{(4)}(1)=(1,0)$.
$f^{(4)}(t)$ est libre avec $f''(1)$: l'entier q vaut 4.
$M(0,-2)$ est un rebroussement de seconde espèce.
Voici l'allure de l'arc au voisinage de ce point
(la tangente est tracée en pointillés.)



Remarques

– Pour le développement de $f(t)$ au voisinage de $t=t_0$, on utilise assez rarement la formule de Taylor (qui oblige à calculer les dérivées successives des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$.)

On a le plus souvent recours à des techniques classiques de développement limité.

On écrit ainsi les développements $\begin{cases} x(t_0+h)=x(t_0)+a_ph^p+\cdots+a_qh^q+o(h^q) \\ y(t_0+h)=y(t_0)+b_ph^p+\cdots+b_qh^q+o(h^q) \end{cases}$

Dans cette notation, p est l'indice minimum pour lequel $a_p\neq 0$ ou $b_p\neq 0$, et q est le plus petit indice strictement supérieur à p tel que les vecteurs (a_p,b_p) et (a_q,b_q) soient indépendants (ce sont les mêmes indices que dans les calculs précédents.)

Ces deux développements peuvent être groupés pour écrire :

$$M(t_0+h)=M_0+h^p\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}+\cdots+h^q\begin{pmatrix} a_q \\ b_q \end{pmatrix}+\overrightarrow{o}(h^q)$$

– Revenons à l'exemple précédent, pour l'arc $t\mapsto f(t)=(\mathrm{e}^{t-1}-t, t^3-3t)$.

$$M(1+h)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^h-1-h \\ (1+h)^3-3(1+h) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}(h^3) \\ -2+3h^2+h^3 \end{pmatrix}=M(1)+\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}+\frac{h^3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}+\overrightarrow{o}(h^3)$$

Pour tout $h>0$, on en déduit $\overrightarrow{M(1-h)M(1+h)}=\frac{h^3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}+\overrightarrow{o}(h^3)$

Ainsi, au voisinage de $h = 0$, et avec $h > 0$, le vecteur $\overrightarrow{M(1-h)M(1+h)}$ est colinéaire de même sens que le vecteur $(1, 6)$. Cette observation permet de distinguer entre les deux branches de l'arc au voisinage de $M(1)$ (on se reportera à la figure tracée à la page précédente : la branche la plus "basse" correspond à $t < 1$.)

Dans la pratique

– *Points d'inflexion*

Les points d'inflexion sont caractérisés par les conditions "p, q impairs".

En un tel point, les vecteurs $f'(t), f''(t)$ sont nécessairement liés.

On cherchera donc les inflexions *parmi* les points $M(t)$ tels que $D(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$.

On a $D(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -x'^2(t)\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, avec $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

On peut interpréter ce résultat en considérant que les inflexions sont les points en lesquels le coefficient directeur $m(t)$ de la tangente à l'arc passe par un extrémum.

Dans la pratique, on ne fait pas une recherche systématique des points d'inflexion. De tels points apparaissent en fait lors d'un premier tracé approximatif de l'arc.

– *Points de rebroussement*

Les points de rebroussement sont caractérisés par la condition "p pair".

En un tel point, on a donc $p \geq 2$. Autrement dit, un point de rebroussement est nécessairement un point stationnaire (mais la réciproque est fausse.)

On cherchera donc les points de rebroussement *parmi* les points tels que $x'(t) = y'(t) = 0$.

Les points stationnaires apparaissent assez tôt dans l'étude de l'arc, dès qu'on connait les variations des applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

4. Branches infinies

Définition

On dit que l'arc (I, f) présente une *branche infinie* au voisinage de t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \| f(t) \| = +\infty$.

Si de plus $\lim \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$, on dit que l'arc présente (quant $t \to t_0$) :

– Une branche parabolique dans la direction Oy si $a = \pm\infty$.

– Une branche parabolique dans la direction Ox si $a = 0$.

– La direction asymptotique $y = ax$ si a est un réel non nul.

Définition

On suppose que l'arc (I, f) présente la direction asymptotique $y = ax$ quand $t \to t_0$.

– Si $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = \pm\infty$, on parle de branche parabolique dans la direction $y = ax$.

– Si $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$, on dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

– Dans ce dernier cas, le signe de $y(t) - ax(t) - b$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Si cette quantité est positive (resp. négative) quand $t \to t_0$, alors la courbe est localement (quand $t \to t_0$) "au-dessus" (resp. "en dessous") de l'asymptote.