Table des matières

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
Soient a, b, c trois applications continues sur J, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Dans cette section, on note (E) l'équation : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
On dit que (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
On note (H) l'équation différentielle : $a(x)y' + b(x)y = 0$ (*équation homogène* associée à (E).)

Important : les résultats concernant (E) et (H) supposent qu'on se place sur un sous-intervalle I de J sur lequel la fonction $x \mapsto a(x)$ ne s'annule pas. Pour résoudre (E) ou (H) sur J tout entier, il faudra procéder intervalle par intervalle (entre deux zéros successifs de a), et vérifier ensuite s'il est possible de "recoller" des solutions sur des intervalles consécutifs.

Proposition *(solution générale de (H))*

On considère (H) : $a(x)y' + b(x)y = 0$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas.
La solution générale de (H) sur I est donnée par $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-B(x)}$, où B est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I, et où λ est un scalaire quelconque.

Remarques et exemples

– Le résultat précédent montre que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions y de (H) sur I est égal à l'ensemble des multiples d'une solution particulière y_0 non nulle de (H) sur I.
  On exprime cette situation en disant que $\mathcal{S}_H$ est une *droite vectorielle*. On voit d'ailleurs qu'une solution de (H) sur I, si elle n'est pas la solution nulle, ne s'annule jamais sur I.

– Si on "devine" une solution non nulle de (H) sur I, alors on connait la solution générale (sans avoir à passer par la formule précédente.)
  On constate par exemple que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de (H) : $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  Sur $I = \mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, la solution générale de (H) est donc l'ensemble des $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $(\lambda \in \mathbb{K})$.

Proposition *(solution générale de (E))*

On considère (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, sur un intervalle I où $a(x)$ ne s'annule pas.
La solution générale de (E) sur I est donnée par $y(x) = (C(x) + \lambda)\mathrm{e}^{-B(x)}$, où B est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I, λ est un scalaire quelconque, et C est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{c(x)}{a(x)}\mathrm{e}^{B(x)}$ sur I.

Remarques

– L'expression précédente montre que pour obtenir la solution générale $\mathcal{S}_E$ de (E) sur I, il suffit d'ajouter à une solution particulière de (E) sur I la solution générale de (H) sur I.

– Par exemple, une solution particulière de (E) : $xy' + y = 2x$ est l'application $x \mapsto x$.
  La solution générale de (E) sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ est donc $y(x) = x + \frac{\lambda}{x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

– Autre exemple : considérons l'équation (E) : $\cos(x)\, y' + \sin(x)\, y = 1$, sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  Une solution particulière de (E) (resp. de (H)) sur I est $x \mapsto \sin(x)$ (resp. $x \mapsto \cos(x)$.)
  La solution générale de (E) sur I s'écrit donc $y(x) = \sin(x) + \lambda \cos(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.