Table des matières

I	Quelques rappels	2
II	Méthodes de calcul des intégrales	2
III	Tableau de primitives usuelles	3
IV	Compléments sur le calcul des primitives	4

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

I Quelques rappels

Définition *(primitive sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Proposition *(relation entre les primitives d'une même fonction)*

Soit f une application I dans $\mathbb{R}$ admettant une primitive F sur I.

Soit G une application de I dans $\mathbb{R}$. G est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante λ telle que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + \lambda$.

Proposition *(primitive prenant une valeur donnée en un point donné)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, admettant une primitive F sur I. Soient a dans I et λ dans $\mathbb{R}$.

Il y a une seule primitive G de f telle que $G(a) = \lambda$. Elle est donnée par $G = F - F(a) + \lambda$.

En particulier, $H = F - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Proposition *(expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

Pour toute primitive F de f, on a : $\forall\,(a,b) \in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

II Méthodes de calcul des intégrales

Dans toute la suite, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de f sur I.

Proposition *(intégration par parties)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$.

Proposition *(intégrations par parties répétées)*

Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

On a alors l'égalité : $\displaystyle\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$.

Exemples

– Si $n = 2$: $\displaystyle\int fg'' = fg' - f'g + \int f''g$.

– Si $n = 3$: $\displaystyle\int fg''' = fg'' - f'g' + f''g - \int f'''g$.

Proposition *(changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue.

Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points a et b de J, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

III Tableau de primitives usuelles

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent être parfaitement connus.

$f(x)$	$F(x)$	sur	$f(x)$	$F(x)$	sur
$x^\alpha,\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^{-*}, \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$x \neq \pm 1$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$a^x\ (a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\lvert x\rvert > 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$x \neq k\pi$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{coth} x$	$\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$

On peut généraliser quelques-uns des résultats ci-dessus, notamment :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \lambda\ ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \lambda$$

Exemples de situations classiques

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\varphi(t)}\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\lvert\varphi(t)\rvert\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \varphi'(t)\,\varphi^r(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1}\right]_a^b$$

Dans $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t) = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $\sqrt{1-x^2} = \lvert\cos t\rvert = \cos t$, et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, quand $x = 0$ alors $t = 0$ et quand $x = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.