



Table des matières

I	Quelques rappels	2
II	Méthodes de calcul des intégrales	2
III	Tableau de primitives usuelles	3
IV	Compléments sur le calcul des primitives	4

Dans cette section, I est un intervalle de \mathbb{R} , d'intérieur non vide.

I Quelques rappels

Définition (*primitive sur un intervalle*)

Soit f une application de I dans \mathbb{R} . On dit qu'une application $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Proposition (*relation entre les primitives d'une même fonction*)

Soit f une application I dans \mathbb{R} admettant une primitive F sur I .
Soit G une application de I dans \mathbb{R} . G est une primitive de f sur I \Leftrightarrow il existe une constante λ telle que, pour tout x de I , $G(x) = F(x) + \lambda$.

Proposition (*primitive prenant une valeur donnée en un point donné*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, admettant une primitive F sur I . Soient a dans I et λ dans \mathbb{R} .
Il y a une seule primitive G de f telle que $G(a) = \lambda$. Elle est donnée par $G = F - F(a) + \lambda$.
En particulier, $H = F - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Proposition (*expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Pour toute primitive F de f , on a : $\forall (a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(t) dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

II Méthodes de calcul des intégrales

Dans toute la suite, $\int f(x) dx$ désigne l'ensemble des primitives de f sur I .

Proposition (*intégration par parties*)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 . Alors $\int fg' = fg - \int f'g$.

Proposition (*intégrations par parties répétées*)

Soient f et g deux applications de classe \mathcal{C}^n sur I .
On a alors l'égalité : $\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$.

Exemples

- Si $n = 2$: $\int fg'' = fg' - f'g + \int f''g$.
- Si $n = 3$: $\int fg''' = fg'' - f'g' + f''g - \int f'''g$.

Proposition (*changement de variable*)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} d'intérieur non vide. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue.
Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , telle que $\varphi(J) \subset I$.
Alors, pour tous points a et b de J , on a l'égalité : $\int_a^b (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

III Tableau de primitives usuelles

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent être parfaitement connus.

$f(x)$	$F(x)$	sur	$f(x)$	$F(x)$	sur
$x^\alpha, (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	\mathbb{R}^{+*}	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^{-*}, \mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$x \neq \pm 1$
e^x	e^x	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	\mathbb{R}
$a^x (a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $	$ x > 1$
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}	$\tan x$	$-\ln \cos x $	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right $	$x \neq k\pi$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$x \neq k\pi$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{coth} x$	$\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$

On peut généraliser quelques-uns des résultats ci-dessus, notamment :

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \lambda ; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \lambda$$

Exemples de situations classiques

$$\int_a^b \varphi'(t) e^{\varphi(t)} dt = \left[e^{\varphi(t)} \right]_a^b ; \quad \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \left[\ln |\varphi(t)| \right]_a^b ; \quad \int_a^b \varphi'(t) \varphi^r(t) dt = \left[\frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1} \right]_a^b$$

Dans $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, on pose $x = \varphi(t) = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

On a donc $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$, et $dx = \cos t dt$.

D'autre part, quand $x = 0$ alors $t = 0$ et quand $x = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On en déduit : } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{\pi}{4}.$$