# Table des matières



 

Dans cette section, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

# I Quelques rappels

**Définition** *(primitive sur un intervalle)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et si, pour tout $x$ de $I$ : $F'(x) = f(x)$.

**Proposition** *(relation entre les primitives d'une même fonction)*

Soit $f$ une application $I$ dans $\mathbb{R}$ admettant une primitive $F$ sur $I$.

Soit $G$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. $G$ est une primitive de $f$ sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante $\lambda$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $G(x) = F(x) + \lambda$.

**Proposition** *(primitive prenant une valeur donnée en un point donné)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, admettant une primitive $F$ sur $I$. Soient $a$ dans $I$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Il y a une seule primitive $G$ de $f$ telle que $G(a) = \lambda$. Elle est donnée par $G = F - F(a) + \lambda$.

En particulier, $H = F - F(a)$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$.

**Proposition** *(expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

Pour toute primitive $F$ de $f$, on a : $\forall\,(a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

# II Méthodes de calcul des intégrales

Dans toute la suite, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$.

**Proposition** *(intégration par parties)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$.

**Proposition** *(intégrations par parties répétées)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.

On a alors l'égalité : $\displaystyle\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$.

**Exemples**

– Si $n = 2$ : $\displaystyle\int fg'' = fg' - f'g + \int f''g$.

– Si $n = 3$ : $\displaystyle\int fg''' = fg'' - f'g' + f''g - \int f'''g$.

**Proposition** *(changement de variable)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue.

Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points $a$ et $b$ de $J$, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

## III Tableau de primitives usuelles

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent être parfaitement connus.

| $f(x)$ | $F(x)$ | sur | $f(x)$ | $F(x)$ | sur |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^\alpha,\ (\alpha \neq -1)$ | $\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^{-*}, \mathbb{R}^{+*}$ | $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$ | $x \neq \pm 1$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x\ (a \neq 1)$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $]-1,1[$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$ | $\lvert x\rvert > 1$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\tan x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sin x}$ | $\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$ | $x \neq k\pi$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\cos x}$ | $\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ | $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\operatorname{th} x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{cotan} x$ | $x \neq k\pi$ | $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | $-\operatorname{coth} x$ | $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$ |

On peut généraliser quelques-uns des résultats ci-dessus, notamment :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \lambda\ ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \lambda$$

### Exemples de situations classiques

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\varphi(t)}\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\lvert\varphi(t)\rvert\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \varphi'(t)\,\varphi^r(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1}\right]_a^b$$

Dans $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t) = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $\sqrt{1-x^2} = \lvert\cos t\rvert = \cos t$, et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, quand $x = 0$ alors $t = 0$ et quand $x = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.