Table des matières

I Fonctions logarithmes et exponentielles 2
II Fonctions hyperboliques 6
III Trigonométrie hyperbolique 7
IV Fonctions circulaires réciproques 9
V Fonctions hyperboliques réciproques 12

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

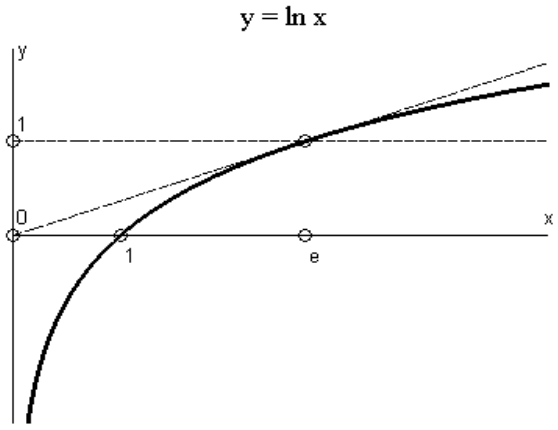
I Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition *(logarithme népérien)*

On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

Propriétés

- L'application ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall\, x > 0,\ \ln' x = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.
- Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
  Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.
- Limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty & \lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty & \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+ & \lim\limits_{0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall\, \alpha > 0, \forall\, \beta > 0 & \lim\limits_{0^+} x^\alpha \,|\ln x|^\beta = 0 & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$$
- L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
  On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a : $\mathrm{e} \approx 2.718281828$.
- L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\frac{1}{x^2} < 0$.)
  Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (avec égalité$\Leftrightarrow x = 1$.)
- Courbe représentative :



Remarques

- Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.
  En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2 \ln|x|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.
  On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

– Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$.
Alors la dérivée logarithmique de g est $\dfrac{g'}{g} = \alpha_1 \dfrac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \dfrac{f_2'}{f_2} + \dots + \alpha_n \dfrac{f_n'}{f_n}$.

– La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances.
Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|}\exp\dfrac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.
Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x(x+2)| + \dfrac{1}{x}$.
En dérivant, on obtient : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \dfrac{x^2-2}{x(x+2)} f$.
En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

Définition *(fonction exponentielle)*

On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

– L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue et strictement croissante.
On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

– L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \exp x$.
Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.

– Propriétés fonctionnelles :
Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x \ \exp y \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

– L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivé seconde est $\exp x > 0$.)
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \leq 1 + x$ (égalité$\Leftrightarrow x = 0$.)

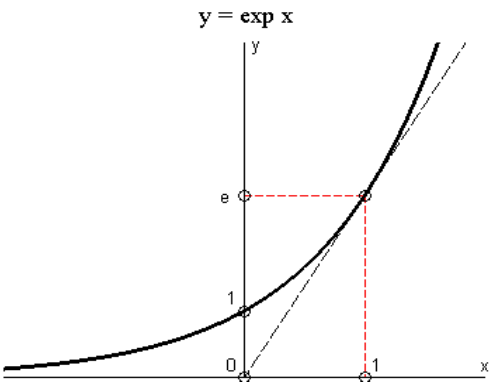
– Limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \exp x = 0^+ & \lim\limits_{+\infty} \exp x = +\infty & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} x \exp x = 0 & \lim\limits_{0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1 & \\ \forall\, \alpha, \beta > 0 & \lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$$

– Notation $x \mapsto \mathrm{e}^x$:
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.
On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp x$.
On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.

– Courbe représentative :



Définition *(fonctions exponentielles de base quelconque)*

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.
L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base* a.

Définition *(fonctions puissances)*

Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant* α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Propriétés des fonctions exponentielles

– Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
L'application $x \mapsto \exp x = \mathrm{e}^x$ est donc l'application exponentielle de base e.

– La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r.

– Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall\, x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a)a^x$.

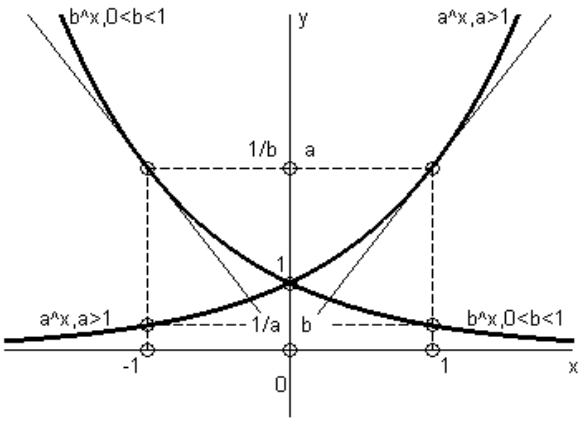
– L'application $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$

– Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a.
Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_{10} x = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.

– Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

– Courbes représentatives :



Propriétés des fonctions puissances

– Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{+*}$).

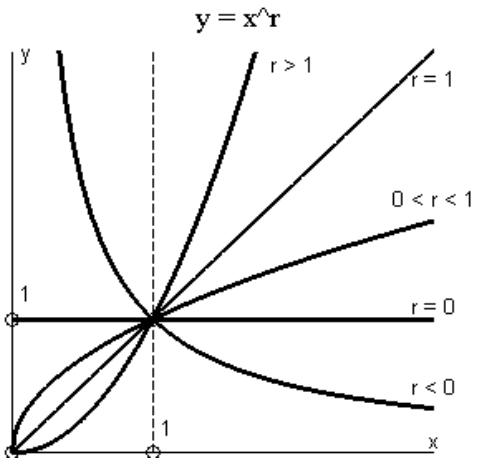
– La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
Sur son domaine $\mathbb{R}^{+*}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$

– Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0.
En $(0,0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$.
Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1,1)$.

– Le placement des différentes courbes est le suivant :
$\forall\, x > 0,\ \forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$: $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$

– Courbes représentatives :



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.