Table des matières

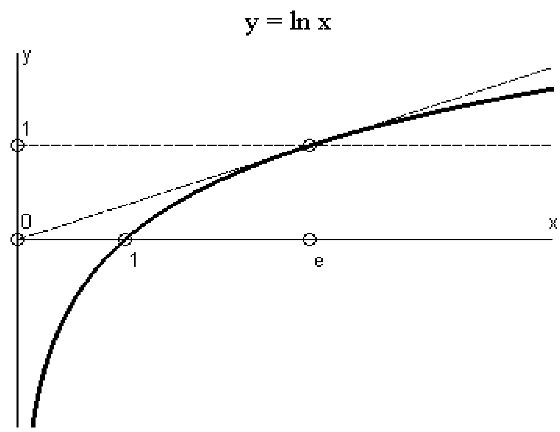
I Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition *(logarithme népérien)*

On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Propriétés

- L'application ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall\, x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.
- Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
  Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.
- Limites usuelles : $\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty & \lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty & \lim\limits_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ & \lim\limits_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall\, \alpha > 0, \forall\, \beta > 0 & \lim\limits_{0^+} x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta = 0 & \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{array}\right.$
- L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
  On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a : $\mathrm{e} \approx 2.718281828$.
- L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\frac{1}{x^2} < 0$.)
  Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (avec égalité$\Leftrightarrow x = 1$.)
- Courbe représentative :



Remarques

- Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.
  En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2 \ln|x|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.
  On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.

– Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$.
Alors la dérivée logarithmique de g est $\dfrac{g'}{g} = \alpha_1 \dfrac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \dfrac{f_2'}{f_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{f_n'}{f_n}$.

– La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances.
Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|} \exp \dfrac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.
Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \dfrac{1}{2} \ln |x(x+2)| + \dfrac{1}{x}$.
En dérivant, on obtient : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \dfrac{x^2-2}{x(x+2)} f$.
En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

Définition *(fonction exponentielle)*

On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

– L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue et strictement croissante.
On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

– L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \exp x$.
Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$.

– Propriétés fonctionnelles :
Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x\ \exp y \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

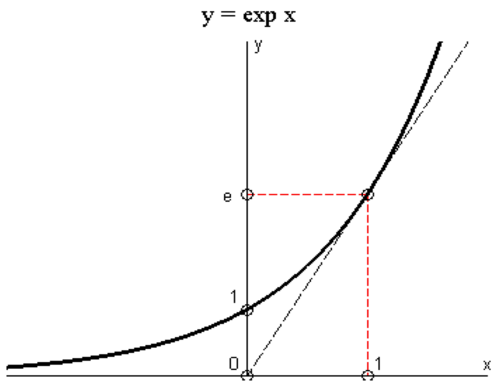
– L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivé seconde est $\exp x > 0$.)
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \leq 1 + x$ (égalité$\Leftrightarrow x = 0$.)

– Limites usuelles : $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} \exp x = 0^+ & \lim\limits_{+\infty} \exp x = +\infty & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} x \exp x = 0 & \lim\limits_{0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1 & \\ \forall\, \alpha, \beta > 0 & \lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$

– Notation $x \mapsto \mathrm{e}^x$:
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.

Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.
On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp x$.
On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.

– Courbe représentative :



Définition *(fonctions exponentielles de base quelconque)*

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.
L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a*.

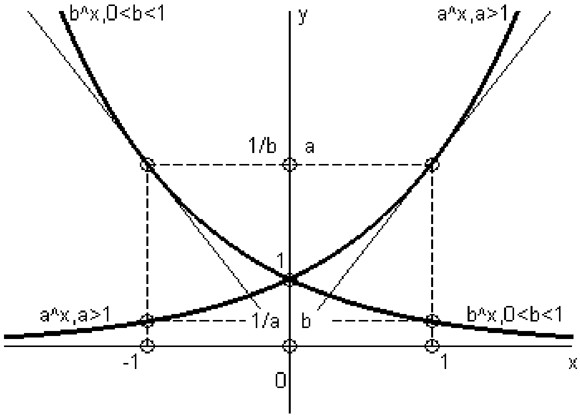
Définition *(fonctions puissances)*

Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant* α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Propriétés des fonctions exponentielles

- Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
  L'application $x \mapsto \exp x = \mathrm{e}^x$ est donc l'application exponentielle de base e.
- La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r.
- Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
  Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a)a^x$.
- L'application $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$
- Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a.
  Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_{10} x = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

– Courbes représentatives :



Propriétés des fonctions puissances

– Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{+*}$).

– La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
Sur son domaine $\mathbb{R}^{+*}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$

– Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0.
En $(0,0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$.
Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1,1)$.

– Le placement des différentes courbes est le suivant :

$$\forall\, x > 0,\ \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } \alpha < \beta : \begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$$

– Courbes représentatives :