CIRCUITS LOGIQUES

SYSTEMES COMBINATOIRES

1 Codage

Toute information reçue ou tout ordre émis est codé en binaire.
Une information tout ou rien dite TOR (par exemple de type présence) est vraie ou fausse : on lui associe donc une variable binaire qui vaut 1 lorsqu l'information est vraie et 0 lorsqu'elle est fausse.
Il en est de même pour les ordres émis par la partie commande. Lorsque l'ordre est émis, la variable binaire qui lui est associée vaut 1, lorsque l'ordre n'est pas émis, la variable binaire associée vaut 0.
C'est un peu plus complexe pour les informations analogiques (qui prennent des valeurs continues) que l'on est donc obligé de coder sur plusieurs bits.

Les systèmes doivent donc émettre des ordres (variables binaires) en fonctions des informations qu'ils reçoivent (variables binaires). La gestion des informations par la partie commande revient donc à élaborer des variables binaires en fonction de variables binaires.

1 Système Combinatoire

Un système combinatoire est un système logique non dynamique.

Définition : **On dit qu'un système est combinatoire lorsque les sorties qu'il élabore sont des fonctions des entrées qu'il reçoit (informations ou ordre) indépendamment de la date à laquelle il les reçoit.**

$$\longrightarrow \boxed{\textit{Système combinatoire}} \longrightarrow$$

$\vec{E} = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_i \end{vmatrix}$ vecteur des entrées avec

$\forall i \; e_i \in [1;n]$ variable binaire

$\vec{S} = \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_j \end{vmatrix}$ vecteur des sorties

avec $\forall j \in [1;m] \; s_j$ variable binaire

2 Algèbre de Boole

La gestion de l'information dans les systèmes s'effectuant en binaire, il est bien évident que les manipulations mathématiques vont s'effectuer avec l'algèbre des nombres binaires, c'est à dire l'algèbre de Boole.

Différentes représentations de ces fonctions existent :

- Le nom de l'opération (ET, OU, NAND, …)
- Le symbole de ces opérations (+, ., ⊕,)
- La table de vérité où tous les cas de figures sont envisagés

- Les symboles logiques où la sortie est le résultat des deux entrées et de l'opération qui figure dans la porte (voir descriptif des fonctions ci-après).
- Les schémas dits à contact où les variables d'entrées sont symbolisées par des interrupteurs, les fonctions par des câblages électriques et le résultat par une lampe (qui s'allume lorsque le résultat doit valoir 1 et qui est éteinte lorsque le résultat doit valoir 0).

2.1 Fonction complémentation

Symbole : Le complémentaire d'une quantité binaire notée a se note $\overline{a}$ **et se lit** a "barre"

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Table de vérité : Le complémentaire de 0 est 1 et le complémentaire de 1 est 0, ce qui nous donne la table de vérité suivante :

Symbole logique (porte logique) : La façon de prendre le complémentaire dans les schémas logiques est de tracer un cercle :

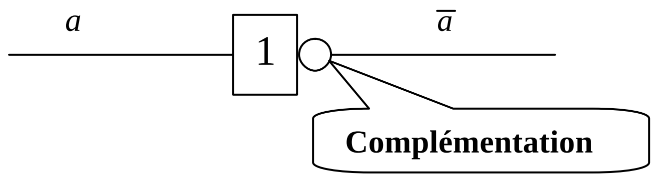
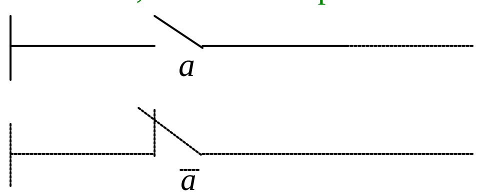


Schéma à contact :

Il existe deux façons de schématiser le complémentaire :

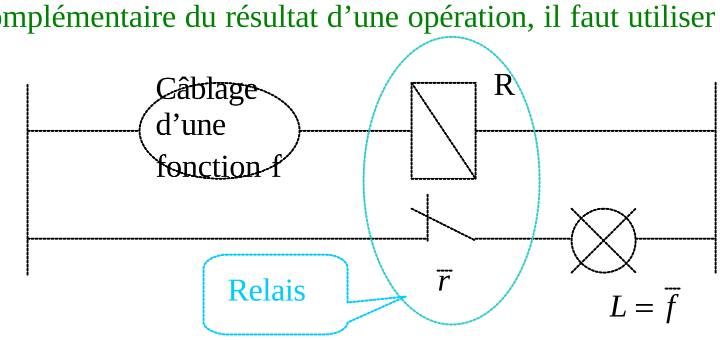
Sur une variable d'entrée, il suffit de représenter l'interrupteur fermé au lieu de le représenter ouvert :



Symbolise a

Symbolise $\overline{a}$

Pour prendre le complémentaire du résultat d'une opération, il faut utiliser un relais de la façon suivante :



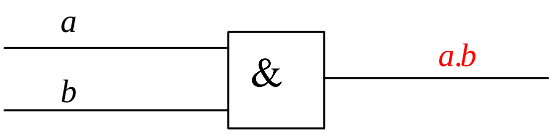
2.2 Fonction ET

Symbole : Le symbole de la fonction ET entre deux quantité binaire notées a et b se note $a.b$ et par simplification ab **mais se lit** a ET b

Table de vérité : **Le ET est une fonction entre au moins deux variables binaires qui est vraie (=1) lorsque toutes les variables sont vraies, ce qui nous donne la table de vérité suivante :**

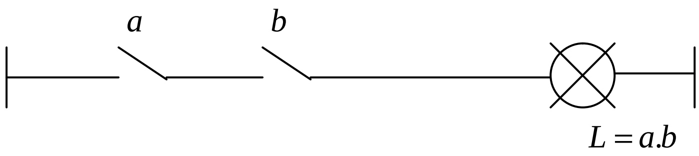
a	b	$a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbole logique (porte logique) : **La façon de prendre le ET de deux variables dans les schémas logiques est le ET scripte :&**



a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Schéma à contact :
Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires en série pour que la lampe (résultat de la fonction ici ET) s'allume lorsque a ET b sont vrais :



2.3 Fonction OU

Symbole : **Le symbole de la fonction OU entre deux quantités binaires notées** a et b se note $a+b$ **mais se lit** a OU b

Table de vérité : **Le OU est une fonction entre au moins deux variables binaires qui est vraie (=1) lorsque au moins une des variables est vraie, ce qui nous donne la table de vérité suivante :**

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symbole logique (porte logique) : **La façon de prendre le OU de deux variables dans les schémas logiques est ³ 1 puisque le résultat est vrai lorsque le résultat de la somme (base 10) est supérieur au égal à 1**

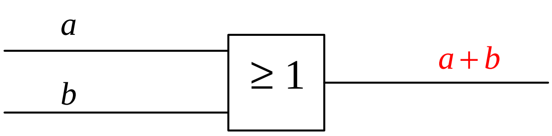
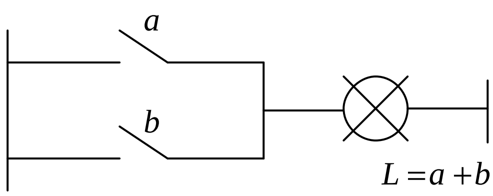


Schéma à contact :
Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires en parallèle pour que la lampe (résultat de la



fonction ici OU) s'allume lorsque a OU b sont vrais :

2.4 Théorèmes de De Morgan

- **Premier théorème de De Morgan :**

Comparons les résultats respectifs des deux opérations suivantes : $\overline{a.b}$ et $\overline{a}+\overline{b}$:

On s'aperçoit que les deux quantités sont égales : $\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a.b$	$\overline{a.b}$	$\overline{a}+\overline{b}$
0	**0**	1	1	0	**1**	**1**
0	**1**	1	0	0	**1**	**1**
1	**0**	0	1	0	**1**	**1**
1	**1**	0	0	1	**0**	**0**

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Pour information}}$

On peut généraliser à n variables a_i, ce qui donne le premier théorème de De Morgan : $\overline{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}$

- **Deuxième théorème de De Morgan :**

Comparons les résultats respectifs des deux opérations suivantes : $\overline{a+b}$ et $\overline{a}.\overline{b}$:

On s'aperçoit que les deux quantités sont égales : $\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a+b$	$\overline{a+b}$	$\overline{a}.\overline{b}$
0	**0**	1	1	0	**1**	**1**
0	**1**	1	0	1	**0**	**0**
1	**0**	0	1	1	**0**	**0**
1	**1**	0	0	1	**0**	**0**

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Pour information}}$

On peut généraliser à n variables a_i, ce qui donne le second théorème de De Morgan : $\overline{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{a_i}$

2.5 Propriétés

Commutativité	$a.b=b.a$		$a+b=b+a$	
Associativité	$a.(b.c)=(a.b).c=a.b.c$		$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$	
Distributivité	$a.(b+c)=a.b+a.c$		$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$	
Absorption	$a+(a.b)=a.(a+b)=a$			
Idempotence	$a+a=a$		$a.a=a$	
Complémentation	$a+\overline{a}=1$	$a=\overline{\overline{a}}$	$a.\overline{a}=0$	
Autres propriétés	$a.1=a$	$a+0=a$	$a+1=1$	$a.0=0$

2.6 Autre fonction :NAND

Le NAND est un NO AND, c'est à dire un $\overline{\text{ET}}$

Symbole : **Le symbole de la fonction NAND entre deux quantités binaires notées** a et b se note $\overline{a.b}$ **mais se lit** a ET b "barre"

Table de vérité : **Le NAND est le complémentaire du ET, il est donc vrai dès que le ET est faux, ce qui nous donne la table de vérité suivante :**

a	b	$\overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rappelons le premier théorème de De Morgan : $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

Symbole logique (porte logique) : **La façon de prendre le NAND de deux variables dans les schémas logiques est de complémenter un ET :**

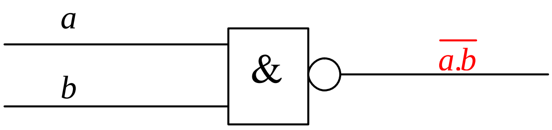


Schéma à contact en utilisant De Morgan :

a NAND $b = \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$ .Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires complémentées en OU, c'est à dire en parallèle pour que la lampe s'allume lorsque a NAND b est vrai :

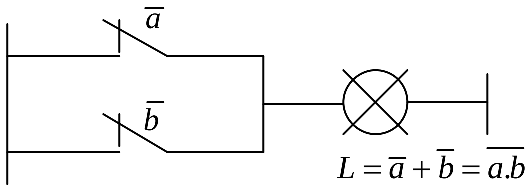
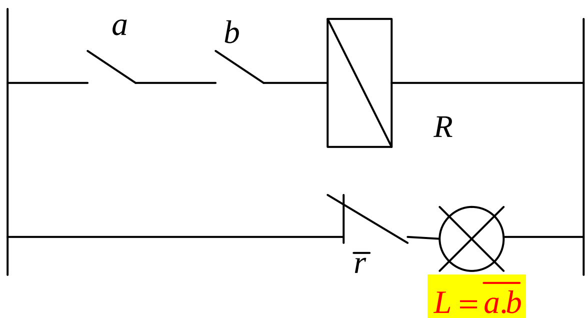


Schéma à contact en utilisant un relais :

Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires en ET, c'est à dire en série et d'en prendre le complémentaire avec un relais pour que la lampe s'allume lorsque a NAND b est vrai :



2.5 Autre fonction :NOR

Le NOR est un NO OR, c'est à dire un $\overline{\text{OU}}$

Symbole : **Le symbole de la fonction NOR entre deux quantités binaires notées** a et b se note $\overline{a+b}$ **mais se lit** a OU b "barre"

Table de vérité : **Le NOR est le complémentaire du OU, il est donc vrai dès que le OU est faux, ce qui nous donne la table de vérité suivante :**

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Rappelons le second théorème de De Morgan : $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$

Symbole logique (porte logique) : **La façon de prendre le NOR de deux variables dans les schémas logiques est de complémenter un OU:**

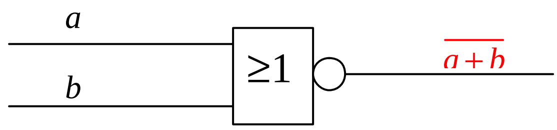
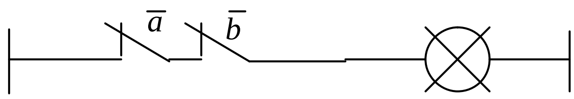


Schéma à contact en utilisant De Morgan :

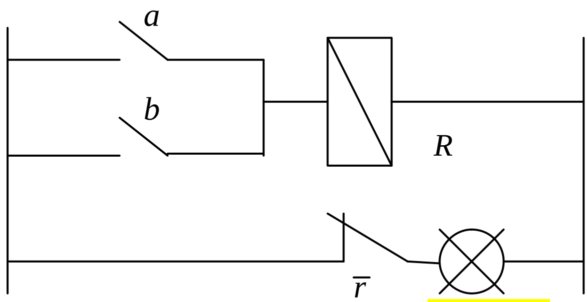
a NOR $b = \overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$ .Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires complémentées en ET, c'est à dire en série pour que la lampe s'allume lorsque a NOR b est vrai .



$L = \overline{a}.\overline{b} = \overline{a+b}$

Schéma à contact en utilisant un relais :

Il suffit de mettre les deux interrupteurs modélisant les deux variables binaires en ET, c'est à dire en série et d'en prendre le complémentaire avec un relais pour que la lampe s'allume lorsque a NAND b est vrai :



$L = \overline{a+b}$

2.6 Autre fonction :OU EXCLUSIF

Le OU EXCLUSIF est vrai lorsque une seule des deux variables (à l'exclusion de l'autre est vraie

Symbole : **Le symbole de la fonction OU EXCLUSIF entre deux quantités binaires notées** a et b se note $a \oplus b$ **mais se lit** a OU EXCLUSIF b

Table de vérité : **Le OU EXCLUSIF est donc vrai lorsque une seule des deux variables vaut 1. Ce qui nous donne la table de vérité suivante :**

a	b	$a \oplus b$	$\overline{a}.b$	$a.\overline{b}$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

On remarque que la colonne du OU EXCLUSIF peut être obtenue en mettant en OU les deux colonnes $\overline{a}b$ et $a\overline{b}$ **(chacune étant respectivement un ET, c'est à dire vraie dans une seule combinaison).**
On obtient ainsi la fonction OU EXCLUSIF sous forme de « somme » de ET, c'est à dire sous sa première forme canonique :

$$\boxed{a \oplus b = \overline{a}b + a\overline{b}}$$

Symbole logique (porte logique) : **La façon de prendre le OU EXCLUSIF de deux variables dans les schémas logiques est de mettre =1 dans la porte (puisque la somme décimale vaut strictement 1):**