Table des matières

I Le corps des nombres réels . . . 2
I.1 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ . . . 2
I.2 L'anneau $(\mathbb{R}, +, x)$ . . . 2
I.3 Le corps $(\mathbb{R}, +, x)$ . . . 3
I.4 Nombres rationnels ou irrationnels . . . 3
I.5 Relation d'ordre . . . 4
I.6 Exposants entiers relatifs . . . 4
I.7 Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 5
I.8 Droite numérique achevée . . . 5
I.9 Identités remarquables . . . 6
I.10 Valeur absolue et distance . . . 7
I.11 Quelques inégalités classiques . . . 8
II Borne supérieure, borne inférieure . . . 9
II.1 Axiome de la borne supérieure . . . 9
II.2 Propriétés de la borne Sup et la borne Inf . . . 10
II.3 Congruences, partie entière . . . 10
II.4 Valeurs approchées, densité de $\mathbb{Q}$ . . . 11
II.5 Exposants rationnels . . . 12

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

I Le corps des nombres réels

I.1 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$

On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant l'ensemble $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *nombres réels*, muni de deux opérations $+$ (addition) et $\times$ (produit, noté par juxtaposition : xy plutôt que $x \times y$) et d'une relation d'ordre total $\leq$, qui "étendent" toutes trois celles de $\mathbb{N}$, et qui vérifient les propriétés P_1, P_2, P_3, P_4, et P_5, que nous allons passer en revue.

P_1 : Propriétés de l'addition

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = y + x$
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z$.
- L'entier 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = x$.
- Tout réel x possède un unique "opposé" y vérifiant : $x + y = 0$. Il est noté $y = -x$.

On exprime les propriétés P_1 en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif*.

Remarques et notations

- Pour tous réels x et y, on note $y - x$ plutôt que $y + (-x)$.
  On définit ainsi une nouvelle opération sur $\mathbb{R}$ (*soustraction*) qui ne présente que très peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.
- On vérifie la propriété : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -(x + y) = -x - y$.
- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A = \{-x,\ x \in A\}$.
- On note $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont appelés *entiers relatifs*. On pose $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- La commutativité et l'associativité de la loi $+$ font qu'on peut envisager $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ sans parenthèses et sans se préoccuper de l'ordre des termes. Une telle somme est notée $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

I.2 L'anneau $(\mathbb{R}, +, x)$

P_2 : Propriétés du produit

- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = yx$.
- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x(yz) = (xy)z$.
- Distributivité par rapport à l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x(y + z) = xy + xz$.
- 1 est neutre pour le produit : $\forall x \in \mathbb{R},\ x1 = x$.

On exprime les propriétés P_1 et P_2 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *anneau commutatif*.

Remarques

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x0 = 0$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x(-y) = (-x)y = -(xy)$.
- La commutativité et l'associativité de $\times$ font qu'on peut considérer un produit $x_1 x_2 \cdots x_n$ sans utiliser de parenthèses ni tenir compte de l'ordre des termes.
  Un tel produit est noté $\prod_{k=1}^{n} x_k$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est *stable* pour les lois $+$ et $\times$: $\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2, n + p \in \mathbb{Z}$ et $np \in \mathbb{Z}$.
  Muni des *restrictions* des lois de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ a lui-même une structure d'anneau commutatif.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

Exposants entiers positifs

Pour tout x réel, on définit par récurrence les puissances x^n de x, avec $n \in \mathbb{N}$:

On pose : $x^0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n\, x$.

Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1^n = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0^n = 0$.

On démontre par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n\, y^n \\ x^n\, x^p = x^{n+p} \\ (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$

I.3 Le corps $(\mathbb{R}, +, x)$

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls. Il contient $\mathbb{Z}^*$ et donc $\mathbb{N}^*$.

P_3 : Inversibilité des réels non nuls

$$\begin{cases} \text{Tout réel non nul } x \text{ possède un unique “inverse” } y, \text{ vérifiant } xy = 1. \\ \text{Ce réel est noté } y = x^{-1} \text{ ou } y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1, P_2, P_3 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *corps commutatif*.

Propriétés

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ -x \in \mathbb{R}^*$ et $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*,\ xy \in \mathbb{R}^*$ et $(xy)^{-1} = x^{-1}\, y^{-1}$.
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ou $(y = 0)$.

On note habituellement : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = x\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$.

Une telle notation est rendue possible car le produit est une opération commutative.

I.4 Nombres rationnels ou irrationnels

Définition

On note $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$, et $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés *nombres rationnels*.

Remarques

- L'ensemble $\mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Z}$, est stable pour les lois $+$ et $\times$.
- Muni des restrictions de ces lois, il est lui-même un corps commutatif.
- En particulier l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}^*$ est encore dans $\mathbb{Q}^*$.

Définition

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés *nombres irrationnels*.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

I.5 Relation d'ordre

P_4 : Propriétés de la relation d'ordre

$$\begin{cases} \text{Compatibilité avec l'addition :} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z. \\ \text{Compatibilité avec le produit par un réel positif ou nul :} \\ \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \text{ et } (0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz. \end{cases}$$

On résume P_1 à P_4 en disant que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif totalement ordonné*.

Remarques et notations

- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- On note bien sûr, pour tous réels x et y : $\begin{cases} x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } (x \neq y) \\ x \geq y \Leftrightarrow y \leq x; \quad x > y \Leftrightarrow y < x \end{cases}$
- On pose $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{+*}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^{+*}$, et $\mathbb{Q}^+$.
- On pose $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$, $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{-*}$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^{-*}$, et $\mathbb{Q}^-$.
- Le tableau ci-après résume les *règles des signes*

x	≥ 0	≤ 0	≥ 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
y	≥ 0	≤ 0	≤ 0	> 0	< 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
$x+y$	≥ 0	≤ 0	?	> 0	< 0	?	> 0	?	?	< 0
xy	≥ 0	≥ 0	≤ 0	> 0	> 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0

On démontre également les propriétés suivantes, pour tous réels x, y, z :

$$\begin{cases} x+z \leq y+z \Leftrightarrow x \leq y & x+z < y+z \Leftrightarrow x < y \\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x & x < y \Leftrightarrow -y < -x \\ x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 & x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \\ x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0 & x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0 \\ 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} & x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1} < 0 \\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Rightarrow xz \geq yz & x^2 \geq 0 \\ (x < y \text{ et } z > 0) \Rightarrow xz < yz & (x < y \text{ et } z < 0) \Rightarrow xz > yz \end{cases}$$

I.6 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x, et tout entier relatif strictement négatif m, on pose $x^m = (x^{-m})^{-1}$.
On connait donc maintenant le sens de x^m, pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et tout m de $\mathbb{Z}$.

Propriétés

$$\begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \forall (n,p) \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n y^n, \qquad x^n x^p = x^{n+p} \\ \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad \dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p} \qquad (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.