Table des matières

I Le corps des nombres réels

I.1 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$

On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant l'ensemble $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *nombres réels*, muni de deux opérations $+$ (addition) et $\times$ (produit, noté par juxtaposition : xy plutôt que $x \times y$) et d'une relation d'ordre total $\leq$, qui "étendent" toutes trois celles de $\mathbb{N}$, et qui vérifient les propriétés P_1, P_2, P_3, P_4, et P_5, que nous allons passer en revue.

P_1 : Propriétés de l'addition

$$\begin{cases} \text{Commutativité : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y = y+x \\ \text{Associativité : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+(y+z) = (x+y)+z. \\ \text{L'entier 0 est élément neutre : } \forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = x. \\ \text{Tout réel } x \text{ possède un unique "opposé" } y \text{ vérifiant : } x+y=0. \text{ Il est noté } y=-x. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1 en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif*.

Remarques et notations

– Pour tous réels x et y, on note $y - x$ plutôt que $y + (-x)$.
  On définit ainsi une nouvelle opération sur $\mathbb{R}$ (*soustraction*) qui ne présente que très peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.

– On vérifie la propriété : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, -(x+y) = -x-y$.

– Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A = \{-x,\ x \in A\}$.

– On note $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont appelés *entiers relatifs*. On pose $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

– La commutativité et l'associativité de la loi $+$ font qu'on peut envisager $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ sans parenthèses et sans se préoccuper de l'ordre des termes. Une telle somme est notée $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

I.2 L'anneau $(\mathbb{R}, +, x)$

P_2 : Propriétés du produit

$$\begin{cases} \text{Commutativité : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = yx. \\ \text{Associativité : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x(yz) = (xy)z. \\ \text{Distributivité par rapport à l'addition : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x(y+z) = xy+xz. \\ 1 \text{ est neutre pour le produit : } \forall x \in \mathbb{R},\ x1 = x. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1 et P_2 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *anneau commutatif*.

Remarques

– $\forall x \in \mathbb{R},\ x0 = 0.\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x(-y) = (-x)y = -(xy)$.

– La commutativité et l'associativité de $\times$ font qu'on peut considérer un produit $x_1 x_2 \cdots x_n$ sans utiliser de parenthèses ni tenir compte de l'ordre des termes.
  Un tel produit est noté $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$.

– L'ensemble $\mathbb{Z}$ est *stable* pour les lois $+$ et $\times$: $\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2, n+p \in \mathbb{Z}$ et $np \in \mathbb{Z}$.
  Muni des *restrictions* des lois de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ a lui-même une structure d'anneau commutatif.

Exposants entiers positifs

Pour tout x réel, on définit par récurrence les puissances x^n de x, avec $n \in \mathbb{N}$:

On pose : $x^0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n\, x$.

Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1^n = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0^n = 0$.

On démontre par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n\, y^n \\ x^n\, x^p = x^{n+p} \\ (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$

I.3 Le corps $(\mathbb{R}, +, x)$

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls. Il contient $\mathbb{Z}^*$ et donc $\mathbb{N}^*$.

P_3 **: Inversibilité des réels non nuls**

$$\begin{cases} \text{Tout réel non nul } x \text{ possède un unique “inverse” } y, \text{ vérifiant } xy = 1. \\ \text{Ce réel est noté } y = x^{-1} \text{ ou } y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1, P_2, P_3 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *corps commutatif*.

Propriétés

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ -x \in \mathbb{R}^*$ et $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*,\ xy \in \mathbb{R}^*$ et $(xy)^{-1} = x^{-1}\, y^{-1}$.
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ou $(y = 0)$.

On note habituellement : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = x\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$.

Une telle notation est rendue possible car le produit est une opération commutative.

I.4 Nombres rationnels ou irrationnels

Définition

On note $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$, et $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés *nombres rationnels*.

Remarques

- L'ensemble $\mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Z}$, est stable pour les lois $+$ et $\times$.
- Muni des restrictions de ces lois, il est lui-même un corps commutatif.
- En particulier l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}^*$ est encore dans $\mathbb{Q}^*$.

Définition

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés *nombres irrationnels*.

I.5 Relation d'ordre

P_4 : Propriétés de la relation d'ordre

$$\begin{cases} \text{Compatibilité avec l'addition :} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z. \\ \text{Compatibilité avec le produit par un réel positif ou nul :} \\ \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \text{ et } (0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz. \end{cases}$$

On résume P_1 à P_4 en disant que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif totalement ordonné*.

Remarques et notations

- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- On note bien sûr, pour tous réels x et y : $\begin{cases} x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } (x \neq y) \\ x \geq y \Leftrightarrow y \leq x; \quad x > y \Leftrightarrow y < x \end{cases}$
- On pose $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$, $\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{+*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{+*}$, $\mathbb{Z}^{+}$, $\mathbb{Q}^{+*}$, et $\mathbb{Q}^{+}$.
- On pose $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$, $\mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{-*}$, $\mathbb{Z}^{-}$, $\mathbb{Q}^{-*}$, et $\mathbb{Q}^{-}$.
- Le tableau ci-après résume les *règles des signes*

x	≥ 0	≤ 0	≥ 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
y	≥ 0	≤ 0	≤ 0	> 0	< 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
$x+y$	≥ 0	≤ 0	?	> 0	< 0	?	> 0	?	?	< 0
xy	≥ 0	≥ 0	≤ 0	> 0	> 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0

On démontre également les propriétés suivantes, pour tous réels x, y, z :

$$\begin{cases} x+z \leq y+z \Leftrightarrow x \leq y & x+z < y+z \Leftrightarrow x < y \\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x & x < y \Leftrightarrow -y < -x \\ x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 & x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \\ x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0 & x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0 \\ 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} & x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1} < 0 \\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Rightarrow xz \geq yz & x^2 \geq 0 \\ (x < y \text{ et } z > 0) \Rightarrow xz < yz & (x < y \text{ et } z < 0) \Rightarrow xz > yz \end{cases}$$

I.6 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x, et tout entier relatif strictement négatif m, on pose $x^m = (x^{-m})^{-1}$.
On connait donc maintenant le sens de x^m, pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et tout m de $\mathbb{Z}$.

Propriétés

$$\begin{matrix} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \forall (n,p) \in \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n\, y^n, \qquad x^n\, x^p = x^{n+p} \\ \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad \dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p} \qquad (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$