



Table des matières

I	Entiers naturels	2
I.1	L'ensemble \mathbb{N}	2
I.2	Raisonnement par récurrence	2
I.3	Somme et produit	3
I.4	Relation d'ordre et différence	4
I.5	Division euclidienne	4
I.6	Pratique du raisonnement par récurrence	5
II	Ensembles finis	6
II.1	Cardinal d'un ensemble fini	6
II.2	Propriétés des cardinaux	8
III	Dénombrements	9
III.1	Applications entre ensembles finis	9
III.2	Arrangements et combinaisons	9
III.3	Binôme de Newton	10
IV	Ensembles dénombrables	11

I Entiers naturels

I.1 L'ensemble \mathbb{N}

Conformément au programme des classes préparatoires, l'ensemble \mathbb{N} est supposé connu, ainsi que ses propriétés (opérations $+$ et \times , relation d'ordre).

Cependant, en voici une présentation minimale (ou presque) à partir de laquelle on pourrait retrouver toutes ses propriétés.

On admet l'existence d'un ensemble \mathbb{N} , dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, tel que :

a. Successeur d'un entier naturel

Il existe une application $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *succession*.

L'image par s d'un entier naturel n est appelée le *successeur* de n .

b. Entier 0

Il existe un élément de \mathbb{N} , noté 0, qui n'a pas d'antécédent par s .

On note 1 le successeur de 0, 2 celui de 1, 3 celui de 2, etc.

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$: c'est l'ensemble des entiers naturels *non nuls*.

c. Prédécesseur d'un entier naturel non nul

L'application s est une bijection de \mathbb{N} sur $\mathbb{N} - \{0\}$.

Tout n de \mathbb{N}^* est donc le successeur d'un unique m de \mathbb{N} , appelé le *prédécesseur* de n .

d. Axiome de récurrence

Soit A une partie de \mathbb{N} telle que : $0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow s(n) \in A$. Alors $A = \mathbb{N}$.

Autrement dit, si une partie A de \mathbb{N} contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie A est égale à \mathbb{N} tout entier.

Tout cela permet par exemple de définir une *addition* sur \mathbb{N} , de la manière suivante :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad m + 0 = m, \quad m + s(n) = s(m + n)$$

On constate que : $\forall m \in \mathbb{N}, s(m) = m + 1$ (poser $n = 0$ dans la définition précédente).

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on note $n - 1$ le prédécesseur de n . Ainsi $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1 \dots$

L'axiome de récurrence s'écrit maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } A \text{ une partie de } \mathbb{N}, \text{ contenant } 0. \\ \text{On suppose que : } \forall n \in A, n + 1 \in A. \text{ Alors } A = \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

I.2 Raisonnement par récurrence

Soit \mathcal{P} un prédicat, de référentiel \mathbb{N} .

Rappelons qu'on écrit $\mathcal{P}(n)$ pour dire " $\mathcal{P}(n)$ est vraie".

Récurrence simple (ou faible)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose } \mathcal{P}(0) \text{ et, pour tout entier } n, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1). \\ \text{Alors, pour tout entier } n, \mathcal{P}(n). \end{array} \right.$$

Voici donc comment montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels :

- On vérifie que l'entier 0 satisfait à la propriété : c'est le *pas initial* de la récurrence.
- On se **donne** ensuite un entier n , pour lequel on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
C'est l'*hypothèse de récurrence*.
- On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (c'est le "*passage du rang n au rang $n+1$* ").
On exprime l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ en disant que la propriété \mathcal{P} est *héréditaire*.
- On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n .

I.3 Somme et produit

Toutes les opérations sur \mathbb{N} peuvent être définies par récurrence (on l'a déjà vu pour l'addition).
Leurs propriétés peuvent être établies de la même manière.

Addition

- La loi $+$ est *associative* : $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m + (n + p) = (m + n) + p$.
- La loi $+$ est *commutative* : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n = n + m$.
- 0 est *élément neutre* : $\forall n \in \mathbb{N}, n + 0 = n$ (cette propriété découle de la définition).
- Tout élément de \mathbb{N} est *régulier* : $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m + p = n + p \Rightarrow m = n$.
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n = 0 \Leftrightarrow m = n = 0$.

Multiplication

On définit un *produit* sur \mathbb{N} , en posant : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} m0 = 0 \\ m(n+1) = mn + m \end{cases}$

Une récurrence montre que mn est défini pour tout couple (m, n) .

Toujours par récurrence, on peut alors vérifier les propriétés suivantes :

- La loi \times est *distributive* par rapport à la loi $+$:
 $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m(n + p) = mp + mp$.
- La loi \times est *associative* : $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, m(np) = (mn)p$.
- La loi \times est *commutative* : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, mn = nm$.
- Tout élément de \mathbb{N}^* est *régulier* : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in \mathbb{N}^*, mp = np \Rightarrow m = n$.
- 1 est *élément neutre* : $\forall n \in \mathbb{N}, n1 = n$.

Factorielle

On définit $n!$ (*factorielle n*) par $0! = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n(n-1)!$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^n k$.

Exponentiation

On définit la notation m^n : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m^0 = 1, m^{n+1} = m^n m$.

On montre alors les propriétés suivantes par récurrence :

- $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3 : m^n m^p = m^{n+p}, (m^n)^p = m^{np}, (mn)^p = m^p n^p$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^1 = n, 1^n = 1; \forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$ (mais par convention $0^0 = 1$).

Remarques

$mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1; mn = 0 \Leftrightarrow (m = 0) \text{ ou } (n = 0)$.

I.4 Relation d'ordre et différence

Définition

- On pose : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, m + p = n$.
- Les notations $n \geq m$ et $m \leq n$ sont bien sûr équivalentes.
- On note $m < n$ pour écrire : $(m \leq n)$ et $(m \neq n)$.
- Soit (m, n) dans \mathbb{N}^2 . On pose : $\llbracket m, n \rrbracket = \{p \in \mathbb{N}, m \leq p \leq n\}$.

Propriétés

- \leq définit une relation d'ordre total sur \mathbb{N} . $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : m < n \Leftrightarrow m + 1 \leq n \Leftrightarrow m \leq n - 1$.
- 0 est le minimum de \mathbb{N} .
- Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de \mathbb{N} possède un plus grand élément.
- La relation \leq est *compatible* avec les opérations $+$ et \times , ce qui signifie :
 - $\forall (m, n, p) \in \mathbb{N} : m \leq n \Rightarrow (m + p \leq n + p)$ et $(mp \leq np)$

Soustraction

Soit (m, n) un couple d'entiers naturels, tels que $m \leq n$. L'entier p tel que $m + p = n$ (unique par régularité) est appelé *différence* de n et de m , et on note $p = n - m$.

Cette notation généralise celle qui a été utilisée au début de ce chapitre pour définir le prédécesseur $m = n - 1$ d'un entier naturel non nul n .

Cette "opération" n'est pas partout définie sur \mathbb{N} (l'entier p n'existe que si $m \leq n$).

Propriétés

On a (entre autres) les égalités suivantes, sous réserve que les différences existent dans \mathbb{N} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m - n) - p = m - (n + p). \text{ Cette quantité est notée } m - n - p. \\ \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m - n) + p = m - (n - p). \text{ Cette quantité est notée } m - n + p. \\ \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, (m + n) - p = m + (n - p). \text{ Cette quantité est notée } m + n - p. \end{array} \right.$$

I.5 Division euclidienne

Définition

- On dit que n *divise* m (ou que m est un *multiple* de n) si : $\exists q \in \mathbb{N}, m = nq$.
- On note alors $n \mid m$. On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur \mathbb{N} .
- Pour cette relation, 1 est le minimum de \mathbb{N} .

Définition

- Soit (m, n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
- Il existe un unique couple (q, r) de \mathbb{N}^2 tel que : $(m = nq + r)$ et $(r \leq n - 1)$
- Le passage du couple (m, n) au couple (q, r) s'appelle *division euclidienne* de m par n .
- Dans cette division, m est le *dividende*, n le *diviseur*, q le *quotient*, et r le *reste*.

Remarque

$n \mid m \Leftrightarrow (m = n = 0)$ ou $(n \neq 0$ et le reste dans la division de m par n est nul).