FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE de l'EXERCICE

ENONCE :

On cherche les applications de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans lui même vérifiant :

$$\textbf{(1)} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

1) Montrer que $f\ :\ (x,y) \longmapsto e^{x+y} - 2(x+y) + (x-y)^2$ vérifie **(1)**. Trouver les extrema de f.

2) Cas général : soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, posons $g(u,v) = f(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2})$.

a) Si l'on note $x : (u,v) \longmapsto \dfrac{u+v}{2}$ et $y : (u,v) \longmapsto \dfrac{u-v}{2}$, on peut écrire $u = x+y$ et $v = x-y$, puis $f(x,y) = g(x+y, x-y)$. Calculer alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g.

c) Résoudre alors l'équation **(1)**.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE