



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$. Soit f une fonction de classe C^1 , définie sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} , convexe, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Pour tout $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on définit la fonction $\varphi_{x,h}$ par $\varphi_{x,h}(t) = f(x + th)$.

1) a) Montrer que $\varphi_{x,h}$ est dérivable et convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

b) En déduire que : $\varphi'_{x,h}(0) \leq \varphi_{x,h}(1) - \varphi_{x,h}(0)$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}f(x) | y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}f(x)$ représente le gradient de f au point x .

3) On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}}f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq 0$ puis que : $x \neq 0 \implies f(x) > 0$.

b) Montrer que $\inf_{(x/||x||=1)} f(x)$ existe. On note α sa valeur. Montrer que $\alpha > 0$.

c) Montrer que pour tout $x / ||x|| > 1$, on a $f(x) \geq \alpha ||x||$. En déduire la valeur de $\lim_{||x|| \rightarrow +\infty} f(x)$.