



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On admettra (ou on rappelle) que si X et Y sont deux variables réelles indépendantes de densités respectives f et g , alors $Z = X + Y$ est une variable à densité ; une densité de Z étant h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt. \quad (*)$$

1) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois exponentielles sur \mathbb{R}_+ de paramètres respectifs a et b tels que :

($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$). Déterminer la loi de $Z_1 + Z_2$. On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

2) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle (sur \mathbb{R}_+), de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer une densité de la variable $-Y$.

b) Montrer, en distinguant les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$, que $X - Y$ admet pour densité la fonction u définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

c) En déduire la loi de $|X - Y|$. On distinguera les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Une densité f_3 de $Z_1 + Z_2$ est donnée par $f_3(x) = \int_0^{+\infty} ae^{-at} f_2(x-t) dt$ où f_2 est une densité de Z_2 .

On trouvera $f_3(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\frac{ab}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$ sinon.

2) c) On trouvera une loi classique.