VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On admettra (ou on rappelle) que si X et Y sont deux variables réelles indépendantes de densités respectives f et g, alors $Z = X + Y$ est une variable à densité ; une densité de Z étant h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt. \qquad (*)$$

1) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois exponentielles sur $\mathbb{R}_+$ de paramètres respectifs a et b tels que :

$(a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$. Déterminer la loi de $Z_1 + Z_2$. On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

2) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle (sur $\mathbb{R}_+$), de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer une densité de la variable $-Y$.

b) Montrer, en distinguant les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$, que $X - Y$ admet pour densité la fonction u définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}.$$

c) En déduire la loi de $|X - Y|$. On distinguera les cas $x < 0,\ x = 0$ et $x > 0$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Une densité f_3 de $Z_1 + Z_2$ est donnée par $f_3(x) = \int_0^{+\infty} ae^{-at} f_2(x-t)dt$ où f_2 est une densité de Z_2.

On trouvera $f_3(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\frac{ab}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$ sinon.

2) c) On trouvera une loi classique.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.