VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \lambda_n \dfrac{(\ln x)^n}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \text{ où } \lambda_n \text{ est un réel donné.} \end{cases}$$

1) Déterminer le réel λ_n pour que la fonction f_n soit une densité de probabilité.

2) On considère une variable X_n de $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ qui admet f_n pour densité.

a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} p(X_n \leq t) = 0.$$

b) La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?

3) Déterminer, sous forme d'une somme, la fonction de répartition de X_n et retrouver le résultat de la question précédente.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Croissances comparées pour la CV de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt$.

Intégration par parties : $I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$. On trouvera $\lambda_n = \frac{2^{n+1}}{n!}$

2) a) Encadrer $F_n(t)$ $(t \geq 1)$ en encadrant le numérateur de la fonction que l'on intègre.

3) On trouvera , pour $t \geq 1$, $F_n(t) = -\frac{1}{t^2} \frac{(2\ln t)^n}{n!} + F_{n-1}(t)$ puis

$$F_n(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2\ln t)^k}{k!}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.