



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \lambda_n \frac{(\ln x)^n}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \text{ où } \lambda_n \text{ est un réel donné.} \end{cases}$$

- 1) Déterminer le réel λ_n pour que la fonction f_n soit une densité de probabilité.
- 2) On considère une variable X_n de (Ω, \mathcal{T}, p) qui admet f_n pour densité.
- a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} p(X_n \leq t) = 0.$$

- b) La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?
- 3) Déterminer, sous forme d'une somme, la fonction de répartition de X_n et retrouver le résultat de la question précédente.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Croissances comparées pour la CV de $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt$.

Intégration par parties : $I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$. On trouvera $\lambda_n = \frac{2^{n+1}}{n!}$

2) a) Encadrer $F_n(t)$ ($t \geq 1$) en encadrant le numérateur de la fonction que l'on intègre.

3) On trouvera , pour $t \geq 1$, $F_n(t) = -\frac{1}{t^2} \frac{(2 \ln t)^n}{n!} + F_{n-1}(t)$ puis

$$F_n(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^n \frac{(2 \ln t)^k}{k!}$$