



## VARIABLES A DENSITE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$  ( $n \geq 1$ ). On effectue dans cette urne deux tirages avec remise de un jeton à chaque fois. On note  $X_n$  et  $Y_n$  les numéros obtenus respectivement aux premier et second tirages et l'on pose  $S_n = X_n + Y_n$ .

1) Déterminer la loi de  $S_n$ .

2) On pose  $Z_n = \frac{S_n}{n}$ . Montrer que la suite  $(Z_n)$  converge en loi.

**NB** on rappelle que  $[x]$  désigne la partie entière du réel  $x$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION

1) Pour calculer  $P(S_n = k)$  ( $2 \leq k \leq 2n$ ) appliquer la formule des probabilités totales avec le sce  $(X_n = i)_{1 \leq i \leq n}$  et montrer que  $P(X_n = i)P(Y_n = k - i) \neq 0 \iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(k - 1, n)$ .

On trouvera  $P(S_n = k) = \frac{k-1}{n^2}$  si  $2 \leq k \leq n + 1$  et  $P(S_n = k) = \frac{2n - k + 1}{n^2}$  sinon.

2) Pour  $F_n(x) = P(Z_n \leq x)$  distinguer  $x \leq 0$ ,  $0 < x \leq 1$ ,  $1 < x \leq 2$  et  $x > 2$ . On trouvera respectivement pour  $F_n(x)$  : 0,  $\frac{\lfloor nx \rfloor (\lfloor nx \rfloor - 1)}{2n^2}$ ,  $\frac{n-1}{2n} + \frac{(3n - \lfloor nx \rfloor + 1)(-n + \lfloor nx \rfloor)}{2n^2}$  et 1.

Pour la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  :  $\lfloor nx \rfloor \underset{+\infty}{\sim} nx$  pour  $x > 0$  et on trouve pour  $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x) & = 0 \quad \forall x \leq 0 \\ & = \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [0; 1] \\ & = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \quad \forall x \in (1; 2] \\ & = 1 \quad \forall x \geq 2. \end{array} \right.$$