VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$). On effectue dans cette urne deux tirages avec remise de un jeton à chaque fois. On note X_n et Y_n les numéros obtenus respectivement aux premier et second tirages et l'on pose $S_n = X_n + Y_n$.

1) Déterminer la loi de S_n.

2) On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n}\cdot$ Montrer que la suite (Z_n) converge en loi.

NB on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Pour calculer $P(S_n = k)$ $(2 \leq k \leq 2n)$ appliquer la formule des probabilités totales avec le sce $(X_n = i)_{1\leq i\leq n}$ et montrer que $P(X_n = i)P(Y_n = k - i) \neq 0 \iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(k - 1, n)$.

On trouvera $P(S_n = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$ si $2 \leq k \leq n + 1$ et $P(S_n = k) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$ sinon.

2) Pour $F_n(x) = P(Z_n \leq x)$ distinguer $x \leq 0$, $0 < x \leq 1$, $1 < x \leq 2$ et $x > 2$. On trouvera respectivement pour $F_n(x)$: 0, $\dfrac{\lfloor nx\rfloor(\lfloor nx\rfloor - 1)}{2n^2}$, $\dfrac{n-1}{2n} + \dfrac{(3n - \lfloor nx\rfloor + 1)(-n + \lfloor nx\rfloor)}{2n^2}$ et 1.

Pour la limite quand $n \to +\infty$: $\lfloor nx\rfloor \underset{+\infty}{\sim} nx$ pour $x > 0$ et on trouve pour $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$

$$\begin{cases} F(x) & = & 0 & \forall x \leq 0 \\ & = & \dfrac{x^2}{2} & \forall x \in [0;1] \\ & = & -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & \forall x \in (1;2] \\ & = & 1 & \forall x \geq 1. \end{cases}$$