# VARIABLES A DENSITE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

On admettra ou on rappelle que si $X$ et $Y$ sont deux variables de densités respectives $f$ et $g$, indépendantes, une densité de la somme $X+Y$ est $h$ donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt.$$

Formule appelée « produit de convolution » de $f$ et $g$.

**1)** Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-2;2]$. Déterminer la loi de $-Y$.

**2)** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-2;2]$.

**a)** Déterminer les lois de $S = X+Y$ et $D = X-Y$.

**b)** Donner la fonction de répartition de $S$.


Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

# INDICATIONS DE SOLUTION

**1)** $-Y$ suit la même loi que $Y$ (chercher sa fonction de répartition)

**2) a)** pour déterminer $h$, prendre une densité $f$ de $X$ et écrire $h(x) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x-t)dt$ en ayant considéré $f(t)$ dans le produit de ‹‹ convolution ››, puis faire un changement de variable et positionner l'intervalle d'intégration par rapport à $-2$ et 2.

On trouvera $h(x) = 0$ si $x \notin [-4;4]$ , $h(x) = \frac{x+4}{16}$ si $-4 \leq x \leq 0$ et $h(x) = \frac{4-x}{16}$ si $0 \leq x \leq 4$.

**b)** Pour la fonction de répartition $H$ de $S$, distinguer les 4 cas : $x \leq -4,\ -4 \leq x \leq 0,\ 0 \leq x \leq 4$ et $x \geq 4$. On trouvera respectivement :

$H(x) = 1,\ H(x) = \frac{(x-4)^2}{16}$, $H(x) = 1 - \frac{(4-x)^2}{16}$ et $H(x) = 1$.