



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On admettra ou on rappelle que si X et Y sont deux variables de densités respectives f et g , indépendantes, une densité de la somme $X + Y$ est h donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt.$$

Formule appelée « produit de convolution » de f et g .

- 1) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-2; 2]$. Déterminer la loi de $-Y$.
- 2) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-2; 2]$.
 - a) Déterminer les lois de $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
 - b) Donner la fonction de répartition de S .

INDICATIONS DE SOLUTION

1) $-Y$ suit la même loi que Y (chercher sa fonction de répartition)

2) a) pour déterminer h , prendre une densité f de X et écrire $h(x) = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x-t)dt$ en ayant considéré $f(t)$ dans le produit de « convolution », puis faire un changement de variable et positionner l'intervalle d'intégration par rapport à -2 et 2 .

On trouvera $h(x) = 0$ si $x \notin [-4; 4]$, $h(x) = \frac{x+4}{16}$ si $-4 \leq x \leq 0$ et $h(x) = \frac{4-x}{16}$ si $0 \leq x \leq 4$.

b) Pour la fonction de répartition H de S , distinguer les 4 cas : $x \leq -4$, $-4 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 4$ et $x \geq 4$. On trouvera respectivement :

$$H(x) = 0, H(x) = \frac{(x+4)^2}{16}, H(x) = 1 - \frac{(4-x)^2}{16} \text{ et } H(x) = 1.$$